Θέματα Άλγεβρας, Αριθμητική Γεωμετρία

Λύσεις ασκήσεων Φυλλαδίου 3

Γιάννης Α. Αντωνιάδης

Άσκηση 1:

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ τότε $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n|_p < \epsilon$.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ να συγκλίνει.

Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι *Cauchy*.

Έστω $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, , και έστω $\epsilon > 0$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n, m \geq n_1 \ \ |S_n - S_m|_p < \epsilon$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $m < n$.

$|S_n - S_m|_p = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n|_p \leq max\{|a_{m+1}|_p + |a_{m+2}|_p + \cdots + |a_n|_p\}$.

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0 \ \ |a_n|_p < \epsilon$.

Επιλέγουμε $n_1 = n_0$ άρα $\forall n, m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n|_p < \epsilon, \ \ |a_m|_p < \epsilon$

άρα $max\{|a_{m+1}|_p + |a_{m+2}|_p + \cdots + |a_n|_p\} < \epsilon$

Τελικά δείξαμε ότι για το τυχαίο $\epsilon > 0 \ \ \exists n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$\forall n, m \geq n_1 \ \ |S_n - S_m|_p < \epsilon$.

Άρα η S_n είναι *Cauchy*, και συνεπώς αφού $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|)$ έπεται ότι συγκλίνει

Άσκηση 2:

Έστω $\{x_n\}$ μία ακολουθία *Cauchy* ρητών αριθμών $\forall \epsilon > 0 \ \ , \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$\forall n, m \geq n_0 \ \ |x_m - x_n|_p < \epsilon$

Αν πάρουμε $m = n + 1$ θα έχουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$.

Έστω τώρα ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$. Θα δείξουμε ότι η x_n είναι *Cauchy*.

Έστω $\epsilon > 0$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0 \ \ |x_{n+1} - x_n|_p < \epsilon$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $m < n$

$|x_m - x_n|_p = |(x_m - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_{m+2}) + (x_{m+2} - x_{m+3}) + \cdots + (x_{n-1} - x_n)|_p \leq$

$max\{|x_m - x_{m+1}|_p, |x_{m+1} - x_{m+2}|_p, \cdots, |x_{n-1} - x_n|_p\}$

Οπότε αν $m, n \geq n_0 \quad max\{|x_{m+1} - x_m|_p, \cdots, |x_n - x_{n-1}|_p\} < \epsilon$

Άρα τελικά $|x_m - x_n|_p < \epsilon$

Οπότε η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι *Cauchy*.

Άσκηση 3:

1. $|15|_5 = \frac{1}{5}, \quad 15 = 5(3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 5^2 + \cdots)$

   $|-1|_5 = 1, \quad -1 = 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + \cdots)$

   Από άσκηση 5 του πρώτου φυλλαδίου προκύπτει ότι:

   $|-3|_5 = 1, \quad -3 = 2 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + \cdots)$

   αφού $\epsilon_5(-3) = (2, 22, 122, 622, \cdots)$ και $\frac{(5^k-2)-(5^{k-1}-2)}{5^{k-1}} = \frac{5^{k-1}(5-1)}{5^{k-1}} = 4.$

2. $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ άρα $|6!|_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

   $2^4 \cdot 5 = 80 \quad \epsilon_3(80) = (2, 8, 26, 80, 80, \cdots)$

   Άρα $6! = 3^2(2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^5 + \cdots)$

3. $\frac{1}{3!} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \quad |\frac{1}{3!}|_3 = 3$

   $2x_0 \equiv 1(mod3) \;\Rightarrow\; x_0 = 2(mod3) \quad x_1 = 3k + 2$

   $2x_1 \equiv 1(mod9) \;\Rightarrow\; 2(3k + 2) = 1(mod9) \;\Rightarrow\; 6k \equiv 6(mod9) \;\Rightarrow$

   $2k \equiv 2(mod3) \;\Rightarrow\; k \equiv 1(mod3) \;\Rightarrow\; x_1 \equiv 5(mod3^2) \quad x_2 = 3^2k + 5$

   $2x_2 \equiv 1(mod3^3) \;\Rightarrow\; 2(3^2k+5) = 1(mod3^3) \quad 2 \cdot 3^2k \equiv 2 \cdot 3^2(mod3^3) \;\Rightarrow$

   $2k \equiv 2(mod3) \;\Rightarrow\; k \equiv 1(mod3) \;\Rightarrow\; x_2 = 14 \quad , x^2 = 3^3k + 14$

   $2x_3 \equiv 1(mod3^4) \;\Rightarrow\; 2(3^3k + 14) = 1(mod3^4) \;\Rightarrow\; 2 \cdot 3^3k \equiv$

   $2 \cdot 3^3(mod3^4) \;\Rightarrow\; 2k \equiv 2(mod3) \;\Rightarrow\; k \equiv 1(mod3) \;\Rightarrow\; x_3 = 41$

   $\epsilon_3(\frac{1}{2}) = (2, 5, 14, 41, \cdots)$

   Επομένως $\frac{1}{3!} = 3^{-1}(2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + \cdots)$

Άσκηση 4:

$\epsilon_p(1) = (1, 1, 1, 1, 1, \cdots)$ άρα

$\frac{1}{p} = p^{-1}(1 + 0 \cdot p + 0 \cdot p^2 + 0 \cdot p^3 + \cdots)$

$\frac{1}{p^k} = p^{-k}(1 + 0 \cdot p + 0 \cdot p^2 + 0 \cdot p^3 + \cdots)$

Άσκηση 5:

Από την άσκηση 3 έχουμε υπολογίσει ότι $\epsilon_3(\frac{1}{2}) = (2, 5, 14, 41, \cdots)$ οπότε

$\frac{1}{2} = 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + \cdots$

$2x_0 \equiv 1(mod5) \;\Rightarrow\; x_0 \equiv 3(mod5) \;\Rightarrow\; x_0 = 5k + 3$

$2x_1 \equiv 1(mod5^2) \;\Rightarrow\; 2(5k + 3) \equiv 1(mod5^2) \;\Rightarrow\; 2 \cdot 5k \equiv 4 \cdot 5(mod25) \;\Rightarrow$

$2k \equiv 4(mod5) \;\Rightarrow\; k \equiv 2(mod5) \;\Rightarrow\; x_1 \equiv 13(mod5^2) \;\Rightarrow\; x_1 = 5^2k + 13.$

$2x_2 \equiv 1(mod5^3) \;\Rightarrow\; 2(5^2k + 13) \equiv 1(mod5^3) \;\Rightarrow\; 2 \cdot 5^2k \equiv 4 \cdot 5^2(mod5^3) \;\Rightarrow$

$2k \equiv 4(mod5) \;\Rightarrow\; k \equiv 2(mod5) \;\Rightarrow\; x_2 \equiv 63(mod5^3) \;\Rightarrow\; x_2 = 5^3k + 63.$

$2x_3 \equiv 1(mod5^4) \;\Rightarrow\; 2(5^3k + 63) \equiv 1(mod5^4) \;\Rightarrow\; 2 \cdot 5^3k \equiv 4 \cdot 5^3(mod5^4) \;\Rightarrow$

$2k \equiv 4(mod5) \;\Rightarrow\; k \equiv 2(mod5) \;\Rightarrow\; x_3 \equiv 313(mod5^4)$

$\epsilon_5(\frac{1}{2}) = (3, 13, 63, 313, \cdots)$

Επομένως, $\frac{1}{2} = 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + \cdots$

$2x_0 \equiv 1(mod7) \ \Rightarrow \ x_0 = 4(mod7) \Rightarrow x_0 = 7k + 4.$

$2x_1 \equiv 1(mod7^2) \ \Rightarrow \ 2(7k+4) \equiv 1(mod7^2) \ \Rightarrow 2 \cdot 7k \equiv 6 \cdot 7(mod7^2) \ \Rightarrow$

$2k \equiv 6(mod7) \ \Rightarrow \ k \equiv 3(mod7) \ \Rightarrow \ x_1 = 25(mod7^2) \Rightarrow x_1 = 7^2k + 25.$

$2x_2 \equiv 1(mod7^3) \ \Rightarrow \ 2(7^2k + 25) \equiv 1(mod7^3) \ \Rightarrow \ 2 \cdot 7^2k \equiv 6 \cdot 7^2(mod7^3) \ \Rightarrow$

$2k \equiv 6(mod7) \ \Rightarrow \ k \equiv 3(mod7) \ \Rightarrow \ x_2 \equiv 172(mod7^3) \Rightarrow x_2 = 7^3k + 172$

$2x_3 \equiv 1(mod7^4) \ \Rightarrow \ 2(7^3k + 172) \equiv 1(mod7^4) \ \Rightarrow$

$2 \cdot 7^3k \equiv 6 \cdot 7^3(mod7^4) \ \Rightarrow \ 2k \equiv 6(mod7) \ \Rightarrow \ k = 3(mod7) \ \Rightarrow$

$x_3 \equiv 1201(mod7^4)$

$\epsilon_7(\frac{1}{2}) = (4, 25, 172, 1201, \cdots)$

Επομένως, $\frac{1}{2} = 4 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^3 + \cdots$

Αφού p-περιττός πρώτος $2|p+1$ και $2(\frac{p+1}{2}) \equiv 1(modp)$ άρα η λύση της

$2x_0 \equiv 1(modp)$ είναι $x_0 \equiv \frac{p+1}{2}(modp)$.

Επίσης $2|p^n + 1$ και $2\frac{p^n+1}{2} \equiv 1(modp^n)$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι η λύση της $2x_{n-1} \equiv 1(modp^n)$ είναι

$x_{n-1} \equiv \frac{p^n+1}{2}(modp^n)$

$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{p^n} = \frac{\frac{p^{n+1}-1}{2} - \frac{p^n+1}{2}}{p^n} = \frac{p^{n+1}+1-p^n-1}{2p^n} = \frac{p^n(p-1)}{2p^n} = \frac{p-1}{2}$ για κάθε$n \geq 1$

Έχουμε ότι $a_0 = x_0 = \frac{p+1}{2}$.

Άρα για ένα περιττό πρώτο p το p-αδικό ανάπτυγμα του $\frac{1}{2}$ θα είναι

$\frac{p+1}{2} + \frac{p-1}{2}p + \frac{p-1}{2}p^2 + \frac{p-1}{2}p^3 + \cdots$