Θέματα Άλγεβρας, Αριθμητική Γεωμετρία

Λύσεις ασκήσεων Φυλλαδίου 6

Γιάννης Α. Αντωνιάδης

Άσκηση 1:

Αν $(a_1,\cdots,a_n)\in\bigcap\limits_{a\in A}V(I_a)$, τότε ισχύει $f(a_1,\cdots,a_n)=0\ \ \forall f\in I_a\ \ \forall a\in A$

οπότε $f(a_1,\cdots,a_n)=0\ \ \forall f\in\sum\limits_{a\in A}I_a\ \ \Rightarrow\ \ (a_1,\cdots,a_n)\in V(\sum\limits_{a\in A}I_a)\ \ \Rightarrow$

$\bigcap\limits_{a\in A}V(I_a)\subseteq V(\sum\limits_{a\in A})I_a\quad(1)$

Έστω τώρα $(a_1,\cdots,a_n)\in V(\sum\limits_{a\in A})I_a$ τότε έχουμε ότι

$f(a_1,\cdots,a_n)=0\ \ \forall f\in\sum\limits_{a\in A}I_a.$

Όμως ισχύει $I_b\subseteq\sum\limits_{a\in A}I_a\ \ \forall b\in A$

Άρα $f(a_1,\cdots,a_n)=0\ \ \forall f\in I_a\ \ \forall a\in A\ \ \Rightarrow\ \ (a_1,\cdots,a_n)\in V(I_a)\ \ \forall a\in A\ \ \Rightarrow$

$(a_1,\cdots,a_n)\in\bigcap\limits_{a\in A}V(I_a)\subseteq\bigcap\limits_{a\in A}V(I_a)\ \ (2)$

Από τις (1) και (2) έπεται $V(\sum\limits_{a\in A}I_a)=\bigcap\limits_{a\in A}V(I_a)$.

Άσκηση 2:

Αν $(a_1,\cdots,a_n)\in K^n$ με $(a_1,\cdots,a_n)\in V(I)$, τότε $f(a_1,\cdots,a_n)=0\ \ \forall f\in I$

όμως $I\cap J\subseteq I$ άρα $f(a_1,\cdots,a_n)=0$ και για κάθε $f\in I\cap J$ άρα

$(a_1,\cdots,a_n)\in V(I\cap J)$. Όμοια αν $(a_1,\cdots,a_n)\in V(J)$ τότε

$(a_1,\cdots,a_n)\in V(I\cap J)$. Οπότε έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}(a_1,\cdots,a_n)\in V(I)\ \ \Rightarrow\ \ (a_1,\cdots,a_n)\in V(I\cap J)\\ (a_1,\cdots,a_n)\in V(J)\ \ \Rightarrow\ \ (a_1,\cdots,a_n)\in V(I\cap J)\end{array}\right\}\ \ \Rightarrow\ \ (a_1,\cdots,a_n)\in$$

$V(I)\cup V(J)\ \ \Rightarrow\ \ (a_1,\cdots,a_n)\in V(I\cap J)$

Οπότε $V(I)\cup V(J)\subseteq V(I\cap J)\ \ (1)$

Ξέρουμε ότι ισχύει $V(I)\cup V(J)=V(IJ)$. Όμως ισχύει

$$\left.\begin{array}{l}IJ\subseteq I\\ IJ\subseteq J\end{array}\right\}\ IJ\subseteq I\cap J\ \ \Rightarrow\ \ V(I\cap J)\subseteq V(IJ)$$

Άρα έχουμε $V(I\cap J)\subseteq V(I)\cup V(J)\ \ (2)$

Από τις (1) και (2) έχουμε $V(I\cap J)=V(I)\cup V(J)$

Άσκηση 3:

Έστω $f\in I(B)\ \ \Rightarrow\ \ f(a_1,\cdots,a_n)=0\ \ \forall(a_1,\cdots,a_n)\in B$

Όμως $A\subseteq B$ άρα $f(a_1,\cdots,a_n)=0\ \ \forall(a_1,\cdots,a_n)\in A$ οπότε $f\in I(A)$

Άρα $I(B)\subseteq I(A)$

Έστω $f \in I(A \cup B) \;\; \Rightarrow \;\; f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \;\; \forall (a_1, \cdots, a_n) \in A \cup B \;\; \Rightarrow$
$f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \;\; \forall (a_1, \cdots, a_n) \in A$ και
$f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \;\; \forall (a_1, \cdots, a_n) \in B \;\; \Rightarrow \;\; f \in I(A)$ και
$f \in I(B) \;\; \Rightarrow \;\; f \in I(A) \cap I(B)$. Οπότε έχουμε $I(A \cup B) \subseteq I(A) \cap I(B)$ (1)
Έστω $f \in I(A) \cap I(B) \;\; \Rightarrow \;\; f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \;\; \forall (a_1, \cdots, a_n) \in A$ και
$f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \;\; \forall (a_1, \cdots, a_n) \in B \;\; \Rightarrow \;\; f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \;\; \forall (a_1, \cdots, a_n) \in$
$A \cup B \;\; \Rightarrow \;\; f \in (A \cup B) \;\; \Rightarrow \;\; I(A) \cap I(B) \subseteq I(A \cup B)$ (2)
Από τις (1) και (2) $I(A \cup B) = I(A) \cup I(B)$.

Παρατήρηση: Η μία κατεύθυνση μπορεί να αποδειχθεί και ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \Rightarrow I(A \cup B) \subseteq I(A) \\ B \subseteq A \cup B \Rightarrow I(A \cup B) \subseteq I(B) \end{array}\right\} \Rightarrow I(A \cup B) \subseteq I(A) \cap I(B).$$

Άσκηση 4:

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν το $I(V)$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες τότε το V δεν είναι ανάγωγο. Εφόσον το $I(V)$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες
$\exists f_1, f_2 \in K[X_1, \cdots, X_n]$ τ.ω. $f_1, f_2 \notin I(V)$ και $f_1 \cdot f_2 \in I(V)$. Αφού το $f_1 \notin I(V)$ συμπεραίνουμε ότι $\exists (a_1, \cdots, a_n) \in V$ τ.ω.$f_1(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$. Άρα $(a_1, \cdots, a_n) \notin V(f_1)$ άρα $V(f_1) \cap V \subsetneqq V$.
Ανάλογα $V(f)_2 \cap V \subsetneqq V$. Τώρα έχουμε
$(V(f_1) \cap V) \cup (V(f_2) \cap V) = (V(f_1) \cup V(f_2)) \cap V = (V(< f_1 >) \cup V(< f_2 >)) \cap V =$
(άσκηση 2) $V(< f_1 > \cap < f_2 >) \cap V = V(< f_1 f_2 >) \cap V = V(f_1 f_2) \cap V = V$
διότι $f_1 \cdot f_2 \in I(V)$ άρα $\{f_1 f_2\} \subseteq I(V) \;\; \Rightarrow \;\; V(f_1 f_2) \supseteq V(I(V)) = V$. Οπότε έχω $(V(f_1) \cap V) \cup (V(f_2) \cap V) = V$. Οπότε αναλύσαμε το V ως ένωση δύο γνήσιων υποσυνόλων του τα οποία είναι και αλγεβρικά αφού από την άσκηση 1 είδαμε ότι τομή αλγεβρικών συνόλων είναι αλγεβρικό σύνολο. Άρα το V δεν είναι ανάγωγο.
Τώρα θα δείξουμε ότι αν το V δεν είναι ανάγωγο τότε το $I(V)$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες. Έστω λοιπόν $V = V_1 \cup V_2$ με $V_1, V_2 \subsetneqq V$ και V_1, V_2 αλγεβρικά σύνολα. Για $i = 1, 2 \;\; V_i \subsetneqq V \;\; \Rightarrow \;\; I(V_i) \supseteq I(V)$. Συγκεκριμένα ισχύει ότι $I(V_i) \supsetneqq I(V)$ διότι αν είχαμε ισότητα $I(V_i) = I(V)$ τότε $V(I(V_i)) = V(I(V)) = V$ και $V(I(V_i)) = V_i$ άρα η $V_i = V$ αντίφαση. Εφόσον λοιπόν $I(V_i) \supsetneqq I(V)$ άρα υπάρχουν f_1, f_2 τ.ω. $f_i \in I(V_i)$ και $f_i \notin I(V)$. Έστω
$(a_1, \cdots, a_n) \in V \;\; \Rightarrow \;\; (a_1, \cdots, a_n) \in V_1 \cup V_2 \;\; \Rightarrow \;\; (a_1, \cdots, a_n) \in V_1$ είτε $(a_1, \cdots, a_n) \in V_2$. Επίσης $f_i \in I(V_i)$ άρα $f_1(a_1, \cdots, a_n) f_2(a_1, \cdots, a_n) = 0 \;\; \Rightarrow$

$(f_1 f_2)(a_1, \cdots, a_n) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; f_1 f_2 \in I(V)$. Άρα το $I(V)$ δεν είναι πρώτο.

Άσκηση 5:

(i) $f(X,Y) = (X^2-1)^2 - Y^2(3-2Y), \quad P=(0,1)$

$f_X = 4X^3 - 4X \quad f_Y = 6Y^2 - 6Y$

$f^{X^2} = 12X^2 - 4 \quad f_{Y^2} = 12Y - 6$

$f_{X^3} = 24x \quad f_{Y^3} = 12$

$f_{X^4} = 24 \quad f_{Y^4} = 0$

$f(0,1) = 0$

$[f_X(0,1)(X-0) + f_Y(o,1)(Y-1)] = 0$

$\frac{1}{2!}[f_{X^2}(0,1)(X-1)^2 + 2f_{XY}(0,1)(X-0)(Y-1) + f_{Y^2}(0,1)(Y-1)^2] =$
$-2X^2 + 3(Y-1)^2$

$\frac{1}{3!}[f_{X^3}(0,1)(X-0)^3 + \cdots + f_{Y^3}(0,1)(Y-1)^3] = 2(Y-1)^3$

$\frac{1}{4!}[f_{X^4}(0,1)(X-0)^4 + \cdots + f^{Y^4}(0,1)(Y-1)^4] = X^4$

Οπότε $f(X,Y) = -2X^2 + 3(Y-1)^2 + 2(Y-1)^3 + X^4$

Άρα η τάξη του $P=(0,1)$ στην f είναι 2

(ii) $f(X,Y) = X^2(3Y-2X^2) - Y^2(1-Y^2)^2, \quad P=(0,1)$

$f_X = 6XY - 8X^3 \quad f_Y = 3X^2 - 2Y + 8Y^3 - 6Y^5$

$f_{X^2} = 6Y - 24X^2 \quad f_{Y^2} = -2 + 24Y^2 - 30Y^4$

$f_{X^3} = -48X \quad f_{Y^3} = 48Y - 120Y^3$

$f_{X^4} = -48 \quad f_{Y^4} = 48 - 360Y^2$

$f_{XY} = 6X \quad f_{Y^5} = -720Y$

$f_{X^2Y} = 6 \quad f_{Y^6} = -720$

$f(0,1) = 0$

$f_X(0,1)(X-0) + f_Y(0,1)(Y-1) = 0$

$\frac{1}{2!}[f_{X^2}(0,1)(X-0)^2 + 2f_{XY}(0,1)(X-0)(Y-1) + f_{Y^2}(0,1)(Y-1)^2] =$
$3X^2 - 4(Y-1)^2$

$\frac{1}{3!}[f_{X^3}(0,1)(X-0)^3 + \cdots + f_{Y^3}(0,1)(Y-1)^3] = 3X^2(Y-1) - 12(Y-1)^3$

$\frac{1}{4!}[f_{X^4}(0,1)(X-0)^4 + \cdots + f_{Y^4}(0,1)(Y-1)^4] = -2X^4 - 13(Y-1)^4$

$\frac{1}{5!}[f_{X^5}(0,1)(X-0)^5 + \cdots + f_{Y^5}(0,1)(Y-1)^5] = -6(Y-1)^5$

$\frac{1}{6!}[f_{X^6}(0,1)(X-0)^6 + \cdots + f_{Y^6}(0,1)(Y-1)^6] = -(Y-1)^6$

$f(X,Y) = 3X^2 - 4(Y-1)^2 + 3X^2(Y-1) - 12(Y-1)^3 - 2X^4 - 13(Y-$
$1)^4 - 6(Y-1)^5 - (Y-1)^6$

Άρα η τάξη του $P=(0,1)$ στην f είναι 2.