Θέματα Άλγεβρας, Αριθμητική Γεωμετρία

Λύσεις ασκήσεων Φυλλαδίου 7

Γιάννης Α. Αντωνιάδης

Άσκηση 1:

Θέλουμε να δείξουμε ότι $Rad(I)$ είναι πρώτο. Άρα θεωρούμε ότι $ab \in Rad(I)$ και $a \notin Rad(I)$ και θα δείξουμε ότι $b \in Rad(I)$. Έστω λοιπόν $ab \in Rad(I)$ τότε θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $(ab)^n \in I$ και αφού R αντιμεταθετικός $a^n b^n \in I$. Το I όμως είναι πρωταρχικό άρα είτε $a^n \in I$είτε $(b^n)^m \in I$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Αν $a^n \in I$ τότε $a \in Rad(I)$ που έχουμε όμως υποθέσει ότι δεν ισχύει, άρα θα ισχύει $(b^n)^m \in I \;\;\Rightarrow\;\; b^{nm} \in I \;\;\Rightarrow\;\; b \in Rad(I)$. Οπότε το $Rad(I)$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.

Άσκηση 2:

Έστω $a \in Rad(I \cap J)$ τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a^n \in I \cap J$ άρα $a^n \in I$ και $a^n \in J \;\;\Rightarrow\;\; a \in Rad(I)$ και $a \in Rad(J)$ οπότε $a \in Rad(I) \cap Rad(J)$ άρα $Rad(I \cap J) \subseteq Rad(I) \cap Rad(J)$.

Έστω τώρα $a \in Rad(I) \cap Rad(J)$ άρα $a \in Rad(I)$ και $a \in Rad(J)$ οπότε $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a^n \in I$ και $\exists m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a^m \in J$.

Όμως $a^{n+m} = a^n a^m$. Αφού $a^n \in I$ από την ιδιότητα του ιδεώδους και $a^n a^m \in I$.

Όμοια $a^m \in J$ άρα και $a^n a^m \in J$ άρα τελικά έχουμε

$a^{n+m} \in I \cap J \;\;\Rightarrow\;\; a \in Rad(I \cap J)$. Οπότε τώρα έχουμε ότι

$Rad(I) \cap Rad(J) \subseteq Rad(I \cap J)$.

Τελικά $Rad(I \cap J) = Rad(I) \cap Rad(J)$.

Άσκηση 3:

Ξέρουμε ότι $Res(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n D(f)$

(i) Αν $f(x) = ax^2 + bx + c$ τότε $f'(x) = 2ax + b$

$$Res(f,f') = det \begin{vmatrix} c & b & a \\ b & 2a & 0 \\ 0 & b & 2a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 2a \\ 0 & b \end{vmatrix} + 2a \begin{vmatrix} c & b \\ b & 2a \end{vmatrix}$$

$$= ab^2 + 2a(2ac - b^2) = ab^2 + 4a^2c - 2ab^2 = a(4ac - b^2)$$

Οπότε $a(4ac - b^2) = (-1)^{\frac{2 \cdot 1}{2}} aD(f) \;\;\Rightarrow\;\; D(f) = b^2 - 4ac$

(ii) Αν $f(x) = x^3 + px + q$ τότε $f'(x) = 3x^2 + p$

Οπότε $Res(f, f') = det \begin{vmatrix} q & p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27q^2 + 4p^3$

(Για τον υπολογισμό της ορίζουσας συμβουλευόμαστε το $PARI/GP$)

Οπότε $27q^2 + 4p^3 = (-1)^{\frac{3\cdot 2}{2}} \cdot 1 \cdot D(f) \quad \Rightarrow \quad D(f) = -27q^2 - 4p^3$

Άσκηση 4:

Το πολυώνυμο είναι ομογενές βαθμού n.

Επομένως, για κάθε t ισχύει $F(tX, tY, tZ) = t^n F(X, Y, Z)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς t και έχουμε:

$\frac{\vartheta F}{\vartheta(tX)} \cdot \frac{\vartheta(tX)}{\vartheta t} + \frac{\vartheta F}{\vartheta(tY)} \cdot \frac{\vartheta(tY)}{\vartheta t} + \frac{\vartheta F}{\vartheta(tZ)} \cdot \frac{\vartheta(tZ)}{\vartheta t} = nt^{n-1}F(X, Y, Z)$

$\Rightarrow \; X\frac{\vartheta F}{\vartheta(tX)} + Y\frac{\vartheta F}{\vartheta(tY)} + Z\frac{\vartheta F}{\vartheta(tZ)} = nt^{n-1}F(X, Y, Z)$

Θέτουμε $t = 1$ και έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 5:

Αν το $P = (x, y)$ είναι ιδιάζων σημείο της $f(X, Y) = (1 + X^2)^2 - XY^2$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} f(X,Y) = 0 \\ \frac{\vartheta f}{\vartheta X}(P) = 0 \\ \frac{\vartheta f}{\vartheta Y}(P) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} (1 + X^2)^2 - XY^2 = 0 & (1) \\ 2(1 + X^2)2X - Y^2 = 0 & (2) \\ -2XY = 0 & (3) \end{array}$$

$(3) \quad \Rightarrow \quad X = 0$ ή $Y = 0$

Όμως το $P = (0, 0)$ δεν επαληθεύει την (1)

Αν $Y = 0$ τότε (2) $\Rightarrow \quad 4x(X^2 + 1) = 0$

Άρα είτε $X = 0$ είτε $X^2 + 1 = 0$

Αν $X = 0$, όπως πριν, απορρίπτεται.

Αν $X^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \pm i$ τότε το $P_1 = (i, 0)$ και το $P_2 = (-i, 0)$

επαληθεύουν και την (1).

Άρα τελικά τα ιδιάζοντα σημεία της $f(X, Y) = (1 + X^2)^2 - XY^2 \in \mathbb{C}[X, Y]$ είναι

τα $P_1 = (i, 0)$ και $P_2 = (-i, 0)$.

Άσκηση 6:

$f(X, Y) = X^5 + X^4 + Y^2, \quad g(X, Y) = X^6 - X^5 + Y^2 \quad P = (0, 0)$

$f_2 = Y^2 \quad m_P(f) = 2$

$g_2 = Y^2 \quad m_P(g) = 2$

Όμως τα f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $P(0,0)$ την $y=0$ άρα δεν τέμνονται εγκάρσια οπότε $I(P, f \cap g) > m_P(f)m_P(g) = 4$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $h(X,Y) = g(X,Y) - f(X,Y)$

$h(X,Y) = X^6 - X^5 + Y^2 - X^5 - X^4 - Y^2 = X^6 - 2X^5 - X^4 = X^4(X^2 - 2X - 1)$

Οπότε έχουμε $I(P, f \cap g) = I(P, f \cap h) = I(P, f \cap X^4) + I(P, f \cap (X^2 - 2X - 1))$

$I(P, f \cap X^4) = I(P, (X^4(X+1) + Y^2) \cap X^4) = I(P, Y^4 \cap X^4) = 8I(P, Y \cap X) =$

Οι Y και X όμως τέμνονται εγκάρσια αφού δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στο $P = (0,0)$ άρα $I(P, Y \cap x) = m_P(Y)m_P(X) = 1$ άρα $I(P, f \cap X^4) = 8$

$I(P, f \cap (X^2 - 2X - 1))$ Όμως $P \notin V(f, X^2 - 2X - 1)$ άρα έχουμε $I(P, f \cap (X^2 - 2X - 1)) = 0$

Άρα τελικά $I(P, f \cap g) = 8 + 0 = 8$