Θέματα Άλγεβρας, Αριθμητική Γεωμετρία

Λύσεις ασκήσεων Φυλλαδίου 8

Γιάννης Α. Αντωνιάδης

Άσκηση 1:

Αν $n = 1 : X + Y + Z = 0$ Δεν έχει ιδιάζοντα σημεία.

Αφού $\frac{\vartheta F}{\vartheta X} = 1, \frac{\vartheta F}{\vartheta Y} = 1, \frac{\vartheta F}{\vartheta Z} = 1$ άρα δεν μηδενίζονται πουθενά.

Αν $n > 1 : X^n + Y^n + Z^n = 0$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta X} = nX^{n-1}$$

Τότε $\frac{\vartheta F}{\vartheta Y} = nY^{n-1}$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta Z} = nZ^{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} X^n + Y^n + Z^n = 0 \\ nX^{n-1} = 0 \\ nY^{n-1} = 0 \\ nZ^{n-1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X = 0, Y = 0, Z = 0$$

Άρα η $F(X, Y, Z) = X^n + Y^n + Z^n$ έχει ένα ιδιάζων σημείο αν $n > 1$ το $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ και συνεπώς η καμπύλη του $Fermat$ είναι μη-ιδιάζουσα για κάθε $n \geq 1$

Άσκηση 2:

Έστω $F(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 + Z^3$

$$H(X,Y,Z) = det\begin{vmatrix} \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta X^2} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta X \vartheta Y} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta X \vartheta Z} \\ \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Y \vartheta X} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Y^2} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Y \vartheta Z} \\ \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Z \vartheta X} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Z \vartheta Y} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Z^2} \end{vmatrix} = det\begin{vmatrix} 6X & 0 & 0 \\ 0 & 6Y & 0 \\ 0 & 0 & 6Z \end{vmatrix} = 6^3 XYZ$$

Άρα τα σημεία καμπής της $F(X, Y, Z)$ θα είναι αυτά που ανήκουν στο $V(F) \cap V(H)$

$$\left.\begin{array}{l} X^3 + Y^3 + Z^3 = 0 \\ 6^3 XYZ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X^3 + Y^3 + Z^3 = 0 \\ XYZ = 0 \end{array}\right.$$

Αν $X = 0 :\ Y^3 + Z^3 = 0 \ \Rightarrow\ Y^3 = (-Z)^3 \ \Rightarrow\ (\frac{Y}{-Z})^3 = 1 \ \Rightarrow\ \frac{Y}{-Z} = 1$ ή

$\frac{Y}{-Z} = w$ ή $\frac{Y}{-Z} = w^2$, όπου w μία πρωταρχική ρίζα της μονάδας.

Άρα τα πιθανά σημεία καμπής είναι τα $[0, -Z, Z]$, $[0, -Zw, Z]$, $[0, -Zw^2, Z]$ που είναι ισοδύναμα με τα $[0, -1, 1]$, $[0, -w, 1]$, $[0, -w^2, 1]$

Αν $Y = 0:$ $X^3 + Z^3 = 0 \Rightarrow X^3 = (-Z)^3 \Rightarrow (\frac{X}{-Z})^3 = 1 \Rightarrow \frac{X}{-Z} = 1$ ή $\frac{X}{-Z} = w$ ή $\frac{X}{-Z} = w^2$

Επίσης σημεία καμπής είναι τα $[-Z, 0, Z]$, $[-Zw, 0, Z]$, $[-Zw^2, 0, Z]$ που είναι ισοδύναμα με τα $[-1, 0, 1]$, $[-w, 0, 1]$, $[-w^2, 0, 1]$, άρα έχουμε άλλα 3 σημεία καμπής.

Αν $Z = 0:$ Όμοια και τα $[1, -1, 0]$, $[1, -w, 0]$, $[1, -w^2, 0]$ είναι σημεία καμπής της F

Άσκηση 3:

Έστω $F(X, Y, Z) = X^3 - YZ^2$. Έστω ότι το $P = [x, y, z]$ είναι ιδιάζων σημείο της F τότε

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - yz^2 = 0 \\ \frac{\vartheta F}{\vartheta x}(P) = 3x = 0 \\ \frac{\vartheta F}{\vartheta y}(P) = -z^2 = 0 \\ \frac{\vartheta F}{\vartheta z}(P) = -2yz = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Άρα ιδιάζων το $[0, y, 0]$ που είναι ισοδύναμο με το $[0, 1, 0]$

$$H(X, Y, Z) = det \begin{vmatrix} \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta X^2} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta X \vartheta Y} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta X \vartheta Z} \\ \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Y \vartheta X} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Y^2} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Y \vartheta Z} \\ \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Z \vartheta X} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Z \vartheta Y} & \frac{\vartheta^2 F}{\vartheta Z^2} \end{vmatrix} = det \begin{vmatrix} 6X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2Z \\ 0 & -2Z & -2Y \end{vmatrix} =$$

$$6X \begin{vmatrix} 0 & -2Z \\ -2Z & -2Y \end{vmatrix} = -24XZ^2$$

Επομένως τα σημεία καμπής της καμπύλης είναι τα μη-ιδιάζοντα σημεία αυτής τα οποία αποτελούν λύση του συστήματος.

$$\left\{\begin{array}{c} x^3 - YZ^2 = 0 \\ -24XZ^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} X^3 - YZ^2 = 0 \\ XZ^2 = 0 \end{array}\right\}$$

Αν $X = 0:$ $YZ^2 = 0$ άρα $Y = 0$ ή $Z = 0$. Άρα έχουμε πιθανά σημεία καμπής τα $P_1 = [0, 0, z] = [0, 0, 1]$ $\quad P_2 = [0, y, 0] = [0, 1, 0]$ $\quad P_3 = [0, 0, 0]$ όμως το P_2

απορρίπτεται γιατί είναι ιδιάζων.

Αν $Z = 0 : \ X^3 = 0 \ \ X = 0$ άρα το $[0, Y, 0] = [0, 1, 0]$ είναι σημείο τομής των H, F όμως είναι ιδιάζων άρα απορρίπτεται.

Άρα τελικά το σημεία καμπής της $F(X, Y, Z) = X^3 - YZ^2$ είναι μόνο το $[0, 0, 1]$ αφού $[0, 0, 0] \notin \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Άσκηση 4:

Έστω $P_1, P_2, \cdots, P_6$ οι κορυφές του εξαγώνου και L_1 ή ευθεία που ορίζεται από τα P_1, P_2, όμοια L_2 ή ευθεία που ορίζεται από τα P_2, P_3 αντίστοιχα, και συνεχίζουμε όμοια έως την L_6. Θεωρούμε τις κυβικές καμπύλες $\Gamma_1 = L_1 L_3 L_5$ και $\Gamma_2 = L_2 L_4 L_6$. Τα $P_1, P_2, \cdots, P_6$ είναι σημεία τομής τους και ανήκουν στην κωνική τομή. Αν αποδείξουμε ότι έχουν άλλα 3 διακεκριμένα σημεία τομής τότε αυτά από γνωστή πρόταση θα βρίσκονται πάνω σε ευθεία. Επίσης αυτά τα 3 θα είναι σημεία τομής των απέναντι πλευρών του εξαγώνου διότι π.χ. η L_4τέμνει την Γ_1 στα $P_4 P_5$ που ανήκουν στις L_3 και L_5 αντίστοιχα, άρα το τρίτο σημείο τομής θα είναι με την L_1. Έστω $P_7 P_8 P_9$ αυτά τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών του εξαγώνου. Αρχικά θα δείξουμε ότι στα $P_1, P_2, \cdots, P_6$ δεν περιλαμβάνεται κάποιο από τα $P_7 P_8 P_9$. Θα δείξουμε για το P_7 και ομοίως αποδεικνύεται για τα άλλα δύο. Έστω P_7 το σημείο τομής των $L_1 L_4$ τότε

Αν $P_7 = P_1$: τότε τα $P_1 P_4 P_5$ είναι στην τομή της L_4 με την κωνική τομή, άρα η κωνική δεν θα ήταν ανάγωγη, άτοπο.

Αν $P_7 = P_2$: Όμοια η L_4 θα έχει πάλι 3 σημεία τομής με την κωνική.

Αν $P_7 = P_i, \ \ i = 3, 4, 5, 6 :$ Τότε η L_1 με την κωνική θα έχουν πάλι 3 σημεία τομής, τα P_1, P_2, P_i, οπότε πάλι οδηγούμαστε σε άτοπο. Επίσης τα P_7, P_8, P_9 είναι διαφορετικά μεταξύ τους διότι αν π.χ. $P_7 = P_8$ με P_7 το σημείο τομής των L_1, L_4 και P_8 το σημείο τομής των L_2, L_5 αντίστοιχα τότε το P_7 ανήκει στην τομή των L_3 και L_4 όπως και το P_4. Άρα οι δύο ευθείες τέμνονται σε δύο σημεία, άτοπο αφού είναι διαφορετικές.

Οπότε καταλήξαμε ότι οι δύο κυβικές καμπύλες Γ_1 και Γ_2 τέμνονται σε 9 διακεκριμένα σημεία. Τα $P_1, P_2, \cdots, P_6$ ανήκουν σε κωνική άρα από γνωστή πρόταση, τα υπόλοιπα P_7, P_8, P_9 θα είναι πάνω σε ευθεία.