



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Άσκηση 5η

Στυλιανού Ιωάννης

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

5^η Σειρά Ασκήσεων

Παράδοση: 23 Νοεμβρίου

Απορίες: yannis@csd.uoc.gr

1. Εστω $x(t)$ και $y(t)$ δύο μιγαδικά σήματα και

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

η συνάστηση ετεροσυσχέτισής τους. Εστω $X(f)$ και $Y(f)$ ο μετασχηματισμός Fourier των δύο αυτών σημάτων. Δείξτε ότι

- $\phi_{yx}(\tau) \leftrightarrow Y^*(f)X(f)$
- $\phi_{xy}^*(-\tau) = \phi_{yx}(\tau)$
- $\phi_{yx}^*(-\tau) = \phi_{xy}(\tau)$

2. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwartz :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

δείξτε ότι:

- η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης έχει μέγιστο για $\tau = 0$.
- η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει μέγιστο για $\tau = 0$.

3. Για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ αποδείξτε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι άρτια συνάρτηση.

4. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των ασκήσεων 2 και 3 γράψτε τα σχόλια σας για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός πραγματικού σήματος. Που έχει μέγιστο; Έχει συμμετρία; Είναι πραγματικό ή μιγαδικό σήμα; Σχεδιάστε ένα παράδειγμα συνάρτησης αυτοσυσχέτισης πραγματικού σήματος. Για το σκοπό αυτό δεν είναι ανάγκη να γνωρίζεται το αρχικό σήμα. Απλά αυτοσχεδιάστε.

5. Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-at}\epsilon(t) \\ y(t) &= e^{-2at}\epsilon(t)\end{aligned}$$

όπου

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Σχεδιάστε τα αρχικά σήματα καθώς και τις μετακινήσει των σημάτων για αρνητική και θετική μετακίνηση.

$$\text{Απ: } x(t) \star y(t) = 1/a(e^{-at} - e^{-2at})\epsilon(t)$$

Σημείωση:

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς τα δύο σήματα δεν ορίζονται για $t = 0$. Πως θα πρέπει να επιλεγεί η τιμή της συνάρτησης $\epsilon(t)$ για $t = 0$ ώστε να μπορούμε να γράψουμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε ισχύει για κάθε t ;

6. Αποδείξτε ότι για τα σήματα:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-at}\epsilon(t) \\ y(t) &= e^{-2at}\epsilon(t) \end{aligned}$$

ισχύει:

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$

όπου $\Phi_{xy}(f)$ η συνάρτηση διαφασματικής πυκνότητας της ενέργειας και $a > 0$.

7. Εστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 5 & t = -2 \\ 2 & t = -1 \\ 2 & t = 1 \\ 5 & t = 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Σχεδιάστε το $x(t)$
- Γράψτε το $x(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό της συνάρτησης Dirac
- Υπολογίστε το Μ.Φ. του $x(t)$

Απ:

$$\begin{aligned} x(t) &= 5\delta(t+2) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 5\delta(t-2) \\ X(f) &= 20 \cos^2(2\pi f) + 4 \cos(2\pi f) - 10 \end{aligned}$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, **Στυλιανού Ιωάννης**. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Άσκηση 5η**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://www.csd.uoc.gr/~hy215>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

