ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Δομές Δεδομένων

Ιωάννης Γ. Τόλλης

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

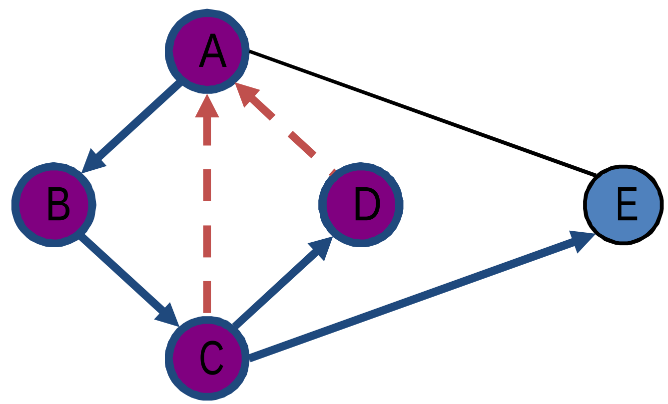
Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα αδειοδότησης

Depth-First Search

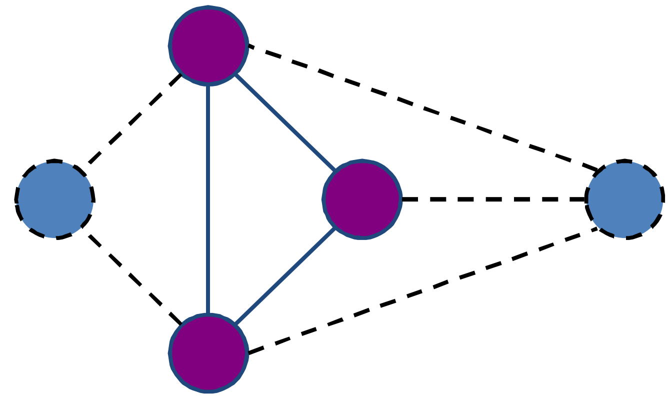


Περιγραφή και Υλικό Ανάγνωσης

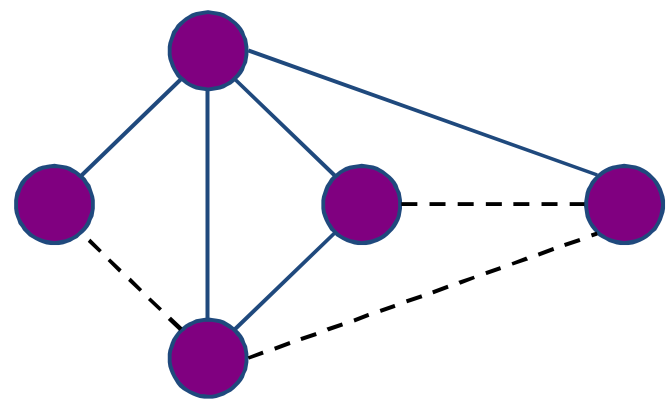
- Ορισμοί (§6.1)
  - Υπογράφοι
  - Συνδεσιμότητα
  - Spanning δέντρα και δάση (forests)
- Depth-first search (§6.3.1)
  - Αλγόριθμος
  - Παράδειγμα
  - Ιδιότητες
  - Ανάλυση
- Εφαρμογές του DFS (§6.5)
  - Εύρεση μονοπατιών
  - Εύρεση κύκλων

Υπογράφοι

- Ένας υπογράφος S ενός γράφου G είναι ένας γράφος έτσι ώστε
  - Οι κορυφές του S είναι υποσύνολο των κορυφών του G
  - Οι ακμές του S είναι υποσύνολο των ακμών του G
- Ένας spanning υπογράφος του G είναι ένας υπογράφος που περιέχει όλες τις κορυφές του G



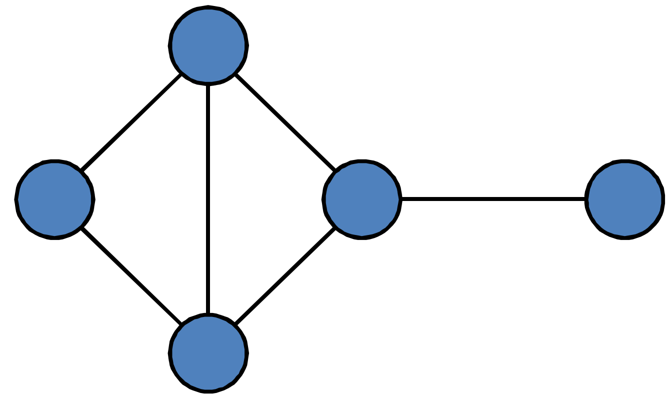
Subgraph



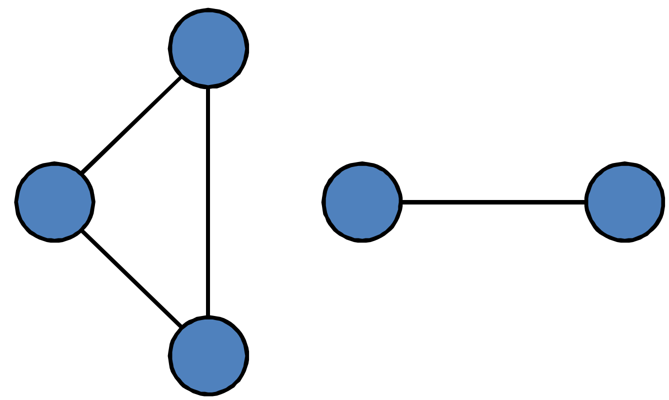
Spanning subgraph

Συνδεσιμότητα

- Ένας γράφος είναι συνδεδεμένος αν υπάρχει ένα μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κορυφών
- Ένα συνδετικό στοιχείο (connected component) ενός γράφου G είναι ένας μέγιστος συνδεδεμένος υπογράφος του G



Connected graph

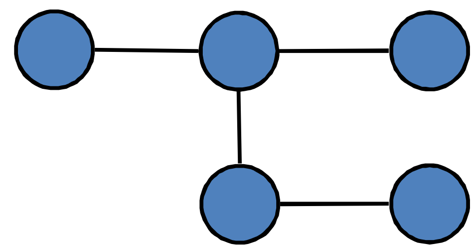


Non connected graph with two connected components

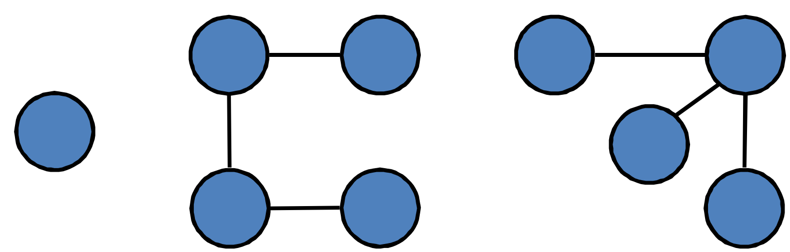
Δέντρα και Δάση

- Ένα (ελεύθερο) δέντρο είναι ένας μη κατευθυ-νόμενος γράφος T έτσι ώστε
  - Ο T είναι συνδεδεμένος
  - Ο T δεν έχει κύκλους

  Αυτός ο ορισμός του δέντρου είναι διαφορετικός από αυτόν του δέντρου με ρίζα
- Ένα δάσος είναι ένας μη κατευθυνόμενος γράφος χωρίς κύκλους
- Τα συνδετικά στοιχεία ενός δάσους είναι δέντρα



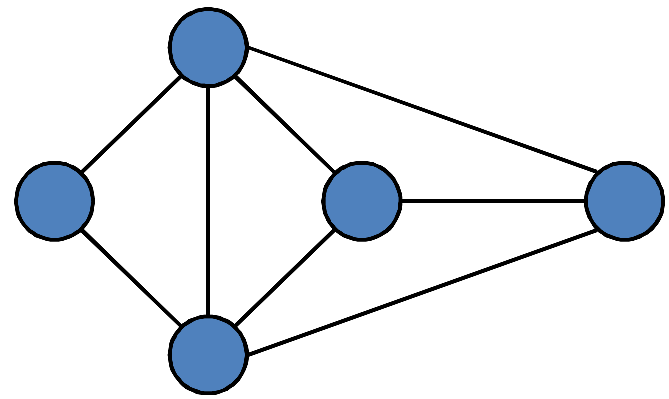
Tree



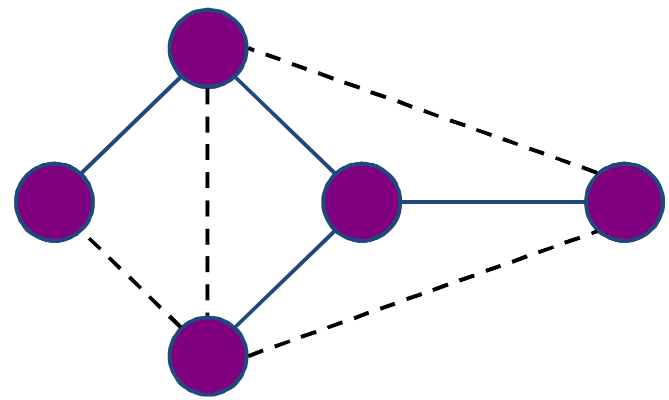
Forest

Spanning Δέντρα και Δάση

- Ένα spanning δέντρο ενός συνδεδεμένου γράφου είναι ένας spanning υπογράφος ο οποίος είναι δέντρο
- Ένα spanning δέντρο δεν είναι μοναδικό εκτός αν ο γράφος είναι δέντρο
- Τα spanning δέντρα έχουν εφαρμογές στη σχεδίαση δικτύων επικοινωνιών
- Ένα spanning δάσος ενός γράφου είναι ένας spanning υπογράφος ο οποίος είναι δάσος



Graph



Spanning tree

Depth-First Search

- Ο Depth-first search (DFS) είναι μια γενική τεχνική για τη διάσχιση ενός γράφου
- Μια διάσχιση DFS ενός γράφου G
  - Επισκέπτεται όλες τις ακμές και τις κορυφές του G
  - Ορίζει αν ο G είναι συνδεδεμένος
  - Υπολογίζει τα συνεκτικά στοιχεία του G
  - Υποογίζει ένα spanning δάσος του G
- Ο DFS σε ένα γράφο με $\boldsymbol{n}$ κορυφές και $\boldsymbol{m}$ ακμές παίρνει $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m})$ χρόνο
- Ο DFS μπορεί να επκταθεί για να λύσει και άλλα προβλήματα γράφων
  - Βρες και ανάφερε ένα μονοπάτι μεταξύ δύο δοσμένων κορυφών
  - Βρες ένα κύκλο στο γράφο
- Ο Depth-first search είναι για τους γράφους ότι το Euler tour για τα δυαδικά δέντρα

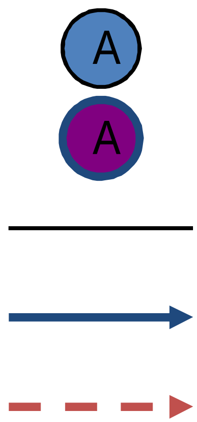
DFS Algorithm

- Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί ένα μηχανισμό για να θέτει και να παίονει “labels” από κορυφές και ακμές

```
Algorithm DFS(G)
    Input graph G
    Output labeling of the edges of G
        as discovery edges and
        back edges
  for all u ∈ G.vertices()
   setLabel(u, UNEXPLORED)
  for all e ∈ G.edges()
   setLabel(e, UNEXPLORED)
  for all v ∈ G.vertices()
   if getLabel(v) = UNEXPLORED
      DFS(G, v)
```

```
Algorithm DFS(G, v)
  Input graph G and a start vertex v of G
  Output labeling of the edges of G
    in the connected component of v
    as discovery edges and back edges
  setLabel(v, VISITED)
  for all e ∈ G.incidentEdges(v)
    if getLabel(e) = UNEXPLORED
      w ← opposite(v,e)
      if getLabel(w) = UNEXPLORED
        setLabel(e, DISCOVERY)
        DFS(G, w)
      else
        setLabel(e, BACK)
```

Παράδειγμα



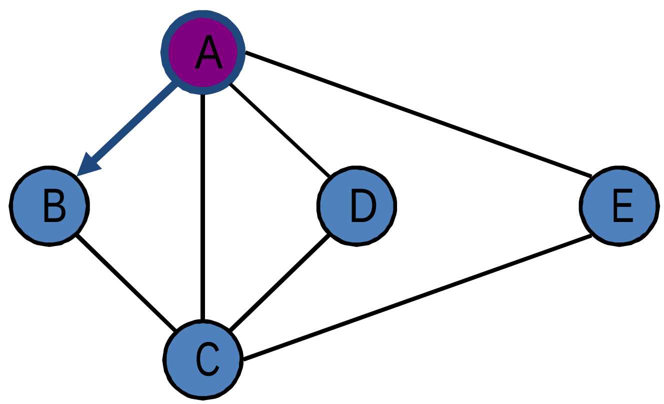
unexplored vertex

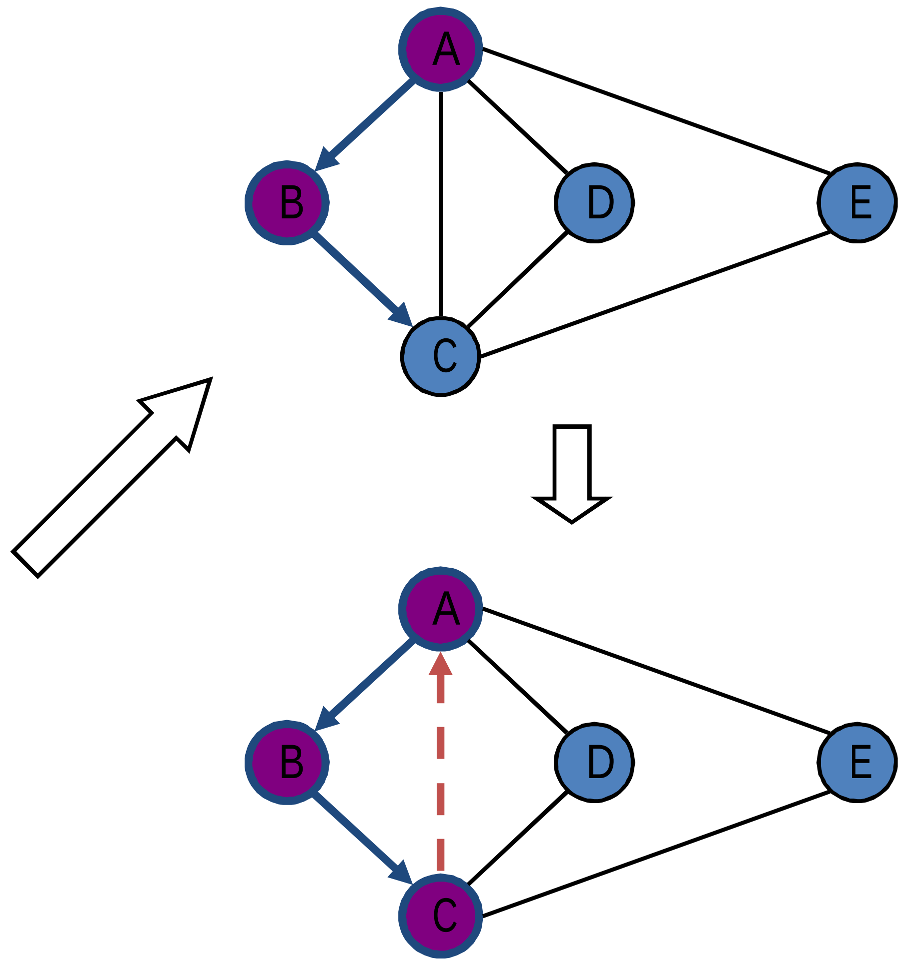
visited vertex

unexplored edge

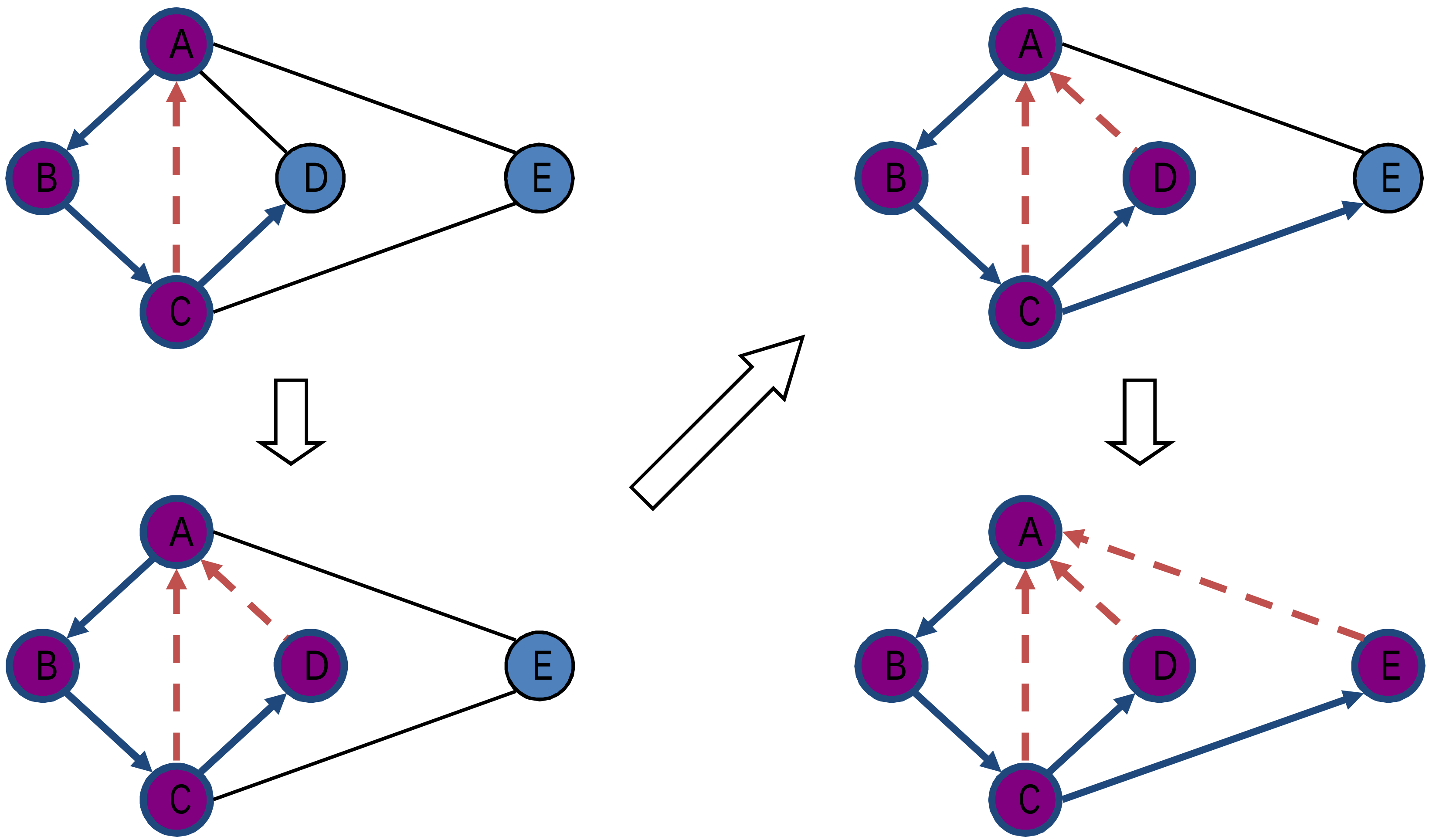
discovery edge

back edge



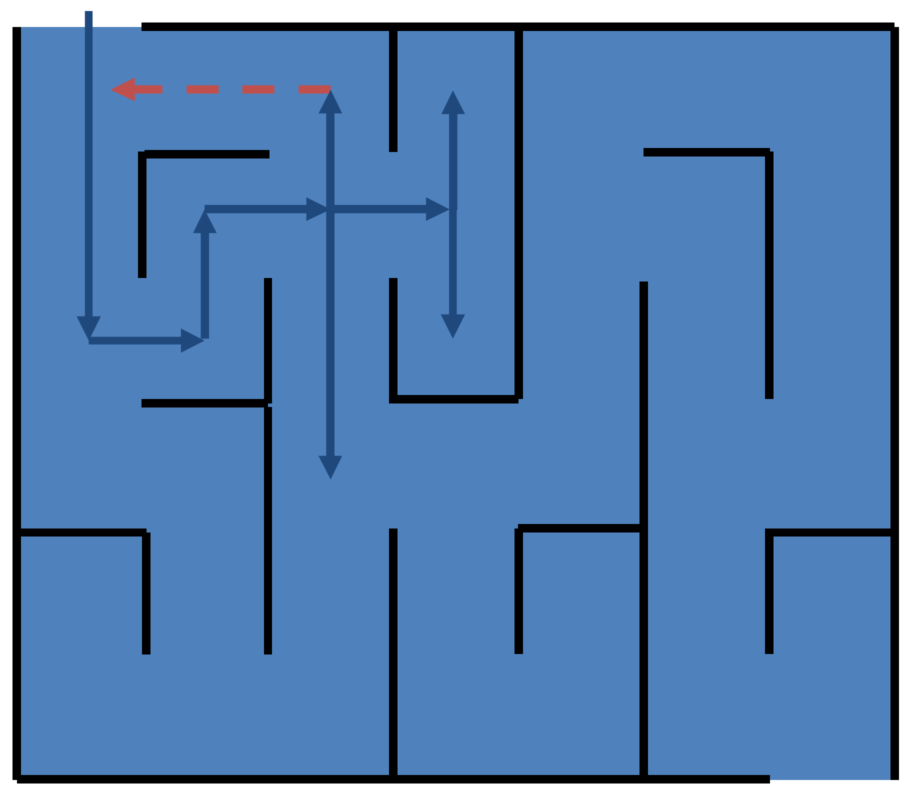


Παράδειγμα (συν.)



DFS and Maze Traversal

- Ο αλγόριθμος DFS είναι παρόμοιος με την κλασσική στρατηγική για την εξερεύνηση ενός λαβυρίνθου
  - Σημειώνουμε κάθε διαστάυρωση, γωνία και αδιέξοδο (vertex) που επισκεπτόμαστε
  - Σημειώνουμε κάθε διάδρομε (edge) που διασχίζουμε
  - Παρακολουθούμε το μονοπάτι πίσω στην είσοδο (start vertex) με ένα σχοινί (recursion stack)



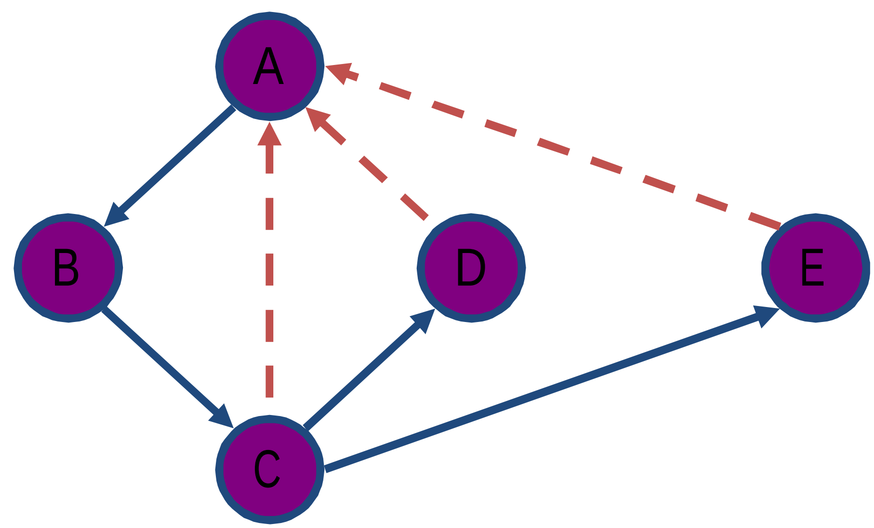
Ιδιότητες του DFS

Ιδιότητα 1

Η ***DFS*(*G*, *v*)** επισκέπτε-ται όλες τις κορυφές και τις ακμές του συνεκτικού στοιχείου του ***v***

Ιδιότητα 2

Οι discovery edges που χαρακτηρίστηκαν από τη ***DFS*(*G*, *v*)** σχηματίζουν ένα spanning δέντρο του συνεκτικού στοιχείου του ***v***



Ανάλυση του DFS

- Η ανάθεση/απόκτηση του label κορυφής/ακμής παίρνει $O(1)$ χρόνο
- Κάθε κορυφή χαρακτηρίζεται δύο φορές
  - Μια ως UNEXPLORED
  - Μια ως VISITED
- Κάθε ακμή χαρακτηρίζεται δύο φορές
  - Μια ως UNEXPLORED
  - Μια ως DISCOVERY ή BACK
- Η μέθοδος incidentEdges καλείται μια φορά για κάθε κορυφή
- Ο DFS τρέχει σε $O(n + m)$ χρόνο δεδομένου ότι ο γ΄ραφος αναπαριστάται απο τη δομή λίστας γειτνίασης
  - Υπενθυμίζουμε ότι $\Sigma_v \deg(v) = 2m$

Έυρεση μονοπατιού

- Μπορούμε να ειδικεύσουμε τον αλγόριθμο DFS για να βρει ένα μονοπάτι μεταξύ δύο δοσμένων κορυφών u και z χρησιμοποιώντας την template method pattern
- Καλούμε τη $DFS(G, u)$ με u την αρχική κορυφή
- Χρησιμοποιούμε μια στοίβα S για να παρακολουθολύμε το μονοπάτι μεταξύ της αρχικής κορυφής και της τωρινής κορυφής
- Μόλις η κορυφή προορισμού z συναντηθεί, επιστρεφούμε το μονοπάτι ως τα περιεχόμενα της στοίβας

```
Algorithm pathDFS(G, v, z)
  setLabel(v, VISITED)
  S.push(v)
  if v = z
    return S.elements()
  for all e ∈ G.incidentEdges(v)
    if getLabel(e) = UNEXPLORED
      w ← opposite(v,e)
      if getLabel(w) = UNEXPLORED
        setLabel(e, DISCOVERY)
        S.push(e)
        pathDFS(G, w, z)
        S.pop(e)
      else
        setLabel(e, BACK)
  S.pop(v)
```

Έυρεση κύκλων

- Μπορούμε να ειδικεύ-σουμε τον αλγόριθμο DFS για να βρει ένα απλό κύκλο χρησιμο-ποιώντας την template method pattern
- Χρησιμοποιούμε μια στοίβα ***S*** για να παρακολουθή-σουμε το μονοπάτι ανάμεσα στην αρχική κορυφή και την τωρινή κορυφή
- Μόλις μια back edge (***v, w***) συναντηθεί, επιστρέφουμε τον κύκλο ως το τμήμα της στοίβας από την κορυφή της ως την κορυφή ***w***

```
Algorithm cycleDFS(G, v, z)
    setLabel(v, VISITED)
    S.push(v)
    for all e ∈ G.incidentEdges(v)
        if getLabel(e) = UNEXPLORED
            w ← opposite(v,e)
            S.push(e)
            if getLabel(w) = UNEXPLORED
                setLabel(e, DISCOVERY)
                pathDFS(G, w, z)
                S.pop(e)
            else
                T ← new empty stack
                repeat
                    o ← S.pop()
                    T.push(o)
                until o = w
                return T.elements()
    S.pop(v)
```

Τέλος Ενότητας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης