ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Δομές Δεδομένων

Ιωάννης Γ. Τόλλης

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

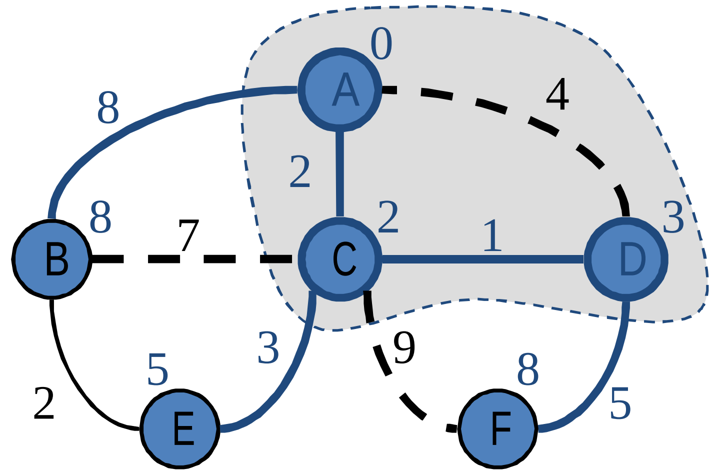
Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα αδειοδότησης

Το συντομότερο μονοπάτι

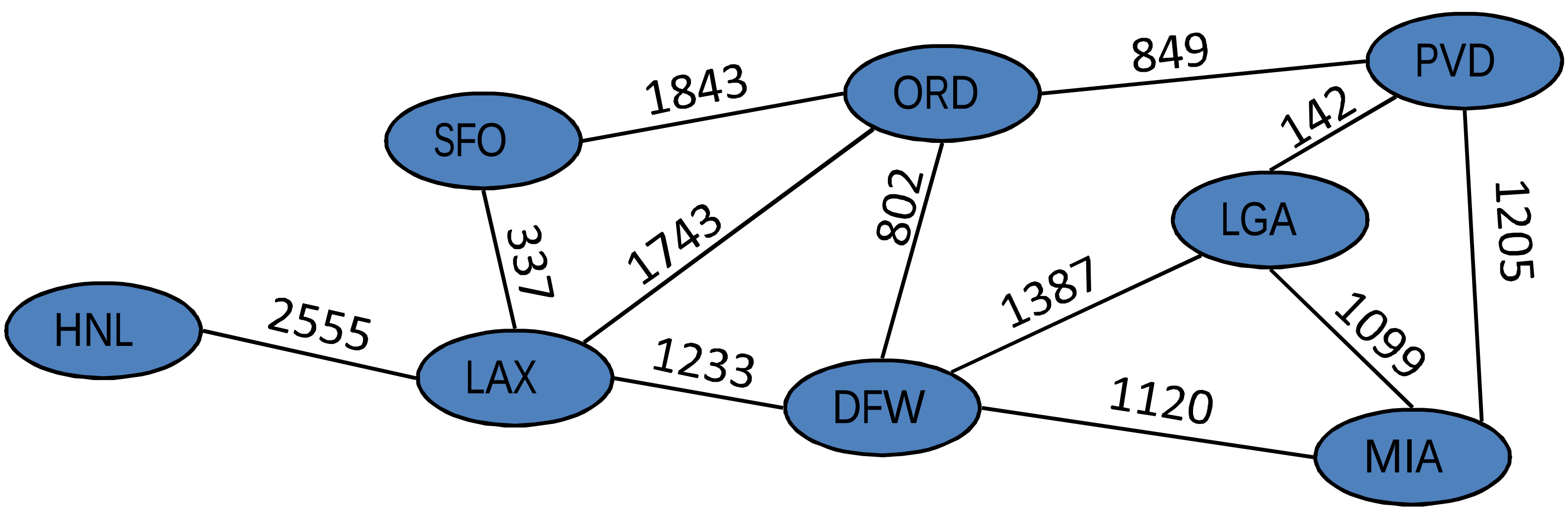


Κύρια σημεία για μελέτη

- Συντομότερο μονοπάτι
  - Ζυγισμένος γράφος
  - Το πρόβλημα του συντομότερου μονοπατιού
  - Ιδιότητες του συντομότερου μονοπατιού
- Ο αλγόριθμος του Dijkstra(§7.1.1)
  - Ο αλγόριθμος
  - Edge relaxation
  - Παράδειγμα
  - Ανάλυση

Ζυγισμένος γράφος

- Σε έναν ζυγισμένο γράφο, κάθε ακμή έχει μια σχετιζόμενη αριθμητική τιμή, που ονομάζεται βάρος της ακμής
- Τα βάρη των ακμών μπορεί να αναπαριστούν,αποστάσεις, κόστη, κλπ.
- παράδειγμα:
  - Σε έναν γράφο πορείας πτήσεων, το βάρος μιας ακμής αναπαριστά την απόσταση σε μίλια ανάμεσα σε δύο αεροδρόμια

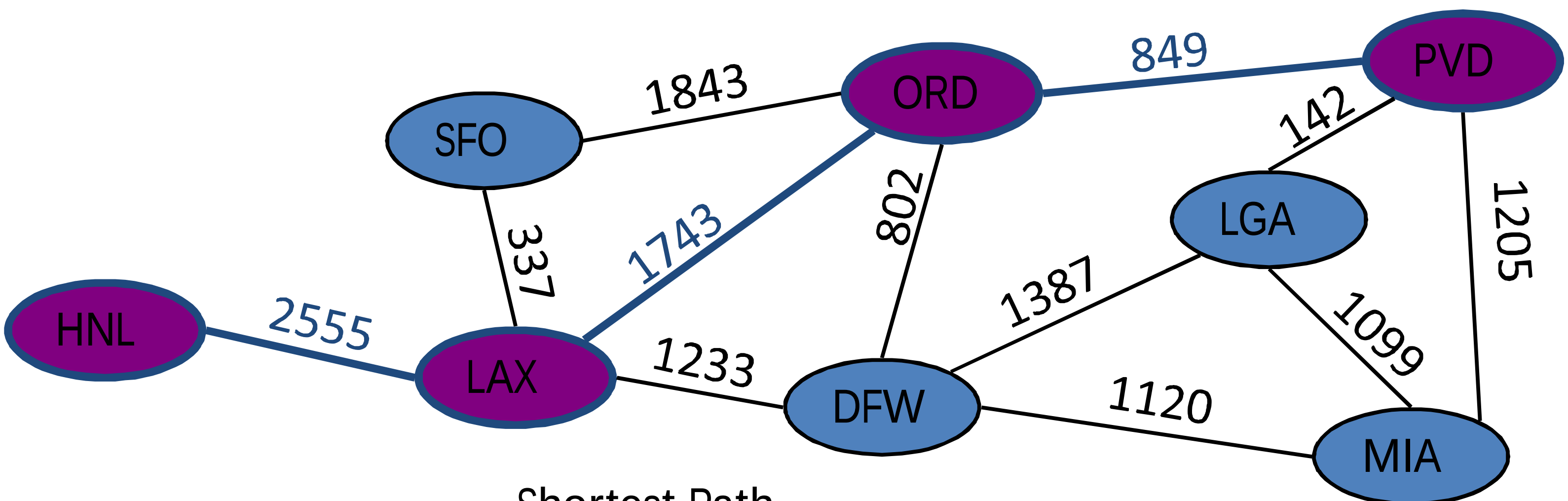


Το πρόβλημα του συντομότερου μονοπατιού

- Δοθέντος ενός ζυγισμένου γράφου και δύο κόμβων $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{v}$, θέλουμε να βρούμε το μονοπάτι του ελάχιστου συνολικού βάρους ανάμεσα στον $\boldsymbol{u}$ και στον $\boldsymbol{v}$
- Εφαρμογές
  - Κρατήσεις πτήσεων
  - Πορείες οδήγησης
  - Δρομολόγηση πακέτων στο διαδίκτυο

Το πρόβλημα του συντομότερου μονοπατιού

- Παράδειγμα:
  - Το συντομότερο μονοπάτι ανάμεσα στην Providence και στην Honolulu



Shortest Path

Ιδιότητες του συντομότερου μονοπατιού

Ιδιότητα 1:

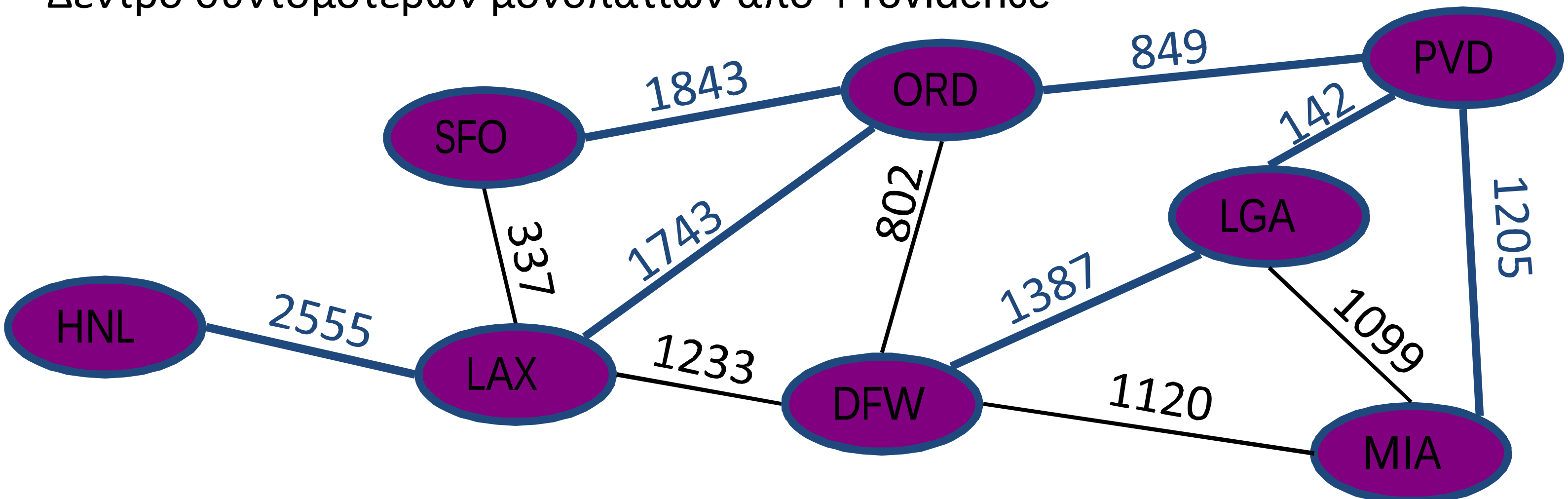
Ένα υπο-μονοπάτι ενός ελάχιστου μονοπατιού είναι από μόνο του ελάχιστο μονοπάτι

Ιδιότητα 2:

Υπάρχει ένα δέντρο ελάχιστων μονοπατιών από έναν αρχικό κόμβο σε όλους τους άλλους κόμβους

Παράδειγμα:

Δέντρο συντομότερων μονοπατιών από Providence



Shortest Path

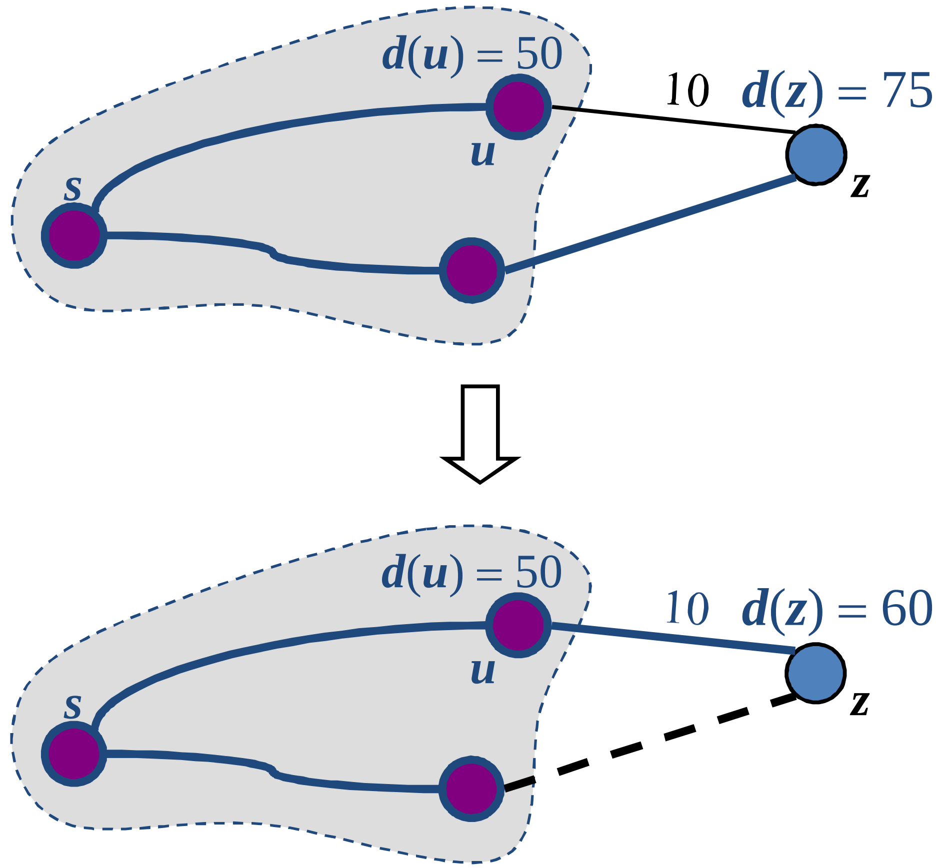
Ο αλγόριθμος του Dijkstra

- Η απόσταση ενός κόμβου v από έναν κόμβο s είναι το μήκος ενός συντομότερου μονοπατιού ανάμεσα στον s και στον v
- Ο αλγόριθμος Dijkstra υπολογίζει τις αποστάσεις όλων των κόμβων από έναν αρχικό κόμβο s
- Υποθέσεις:
  - Ο γράφος είναι συνδεδεμένος
  - Οι ακμές δεν είναι κατευθυνόμενες
  - Τα βάρη των ακμών είναι θετικά
- Δημιουργούμε ένα “σύννεφο”από κόμβους, ξεκινώντας με τον s και καλύπτοντας σταδιακά όλους τους κόμβους
- Αποθηκεύουμε με κάθε κόμβο v μια ετικέτα $d(v)$ που αναπαριστά την απόσταση του v από τον s στον υπογράφο στον υπογράφο που αποτελείται από το σύννεφο και τους προσκείμενους κόμβους
- Σε κάθε βήμα
  - Προσθέτουμε στο σύννεφο τον κόμβο u έξω από το σύννεφο με την μικρότερη ετικέτα απόστασης
  - Ενημερώνουμε τις ετικέτες των κόμβων που είναι προσκείμενες στον u

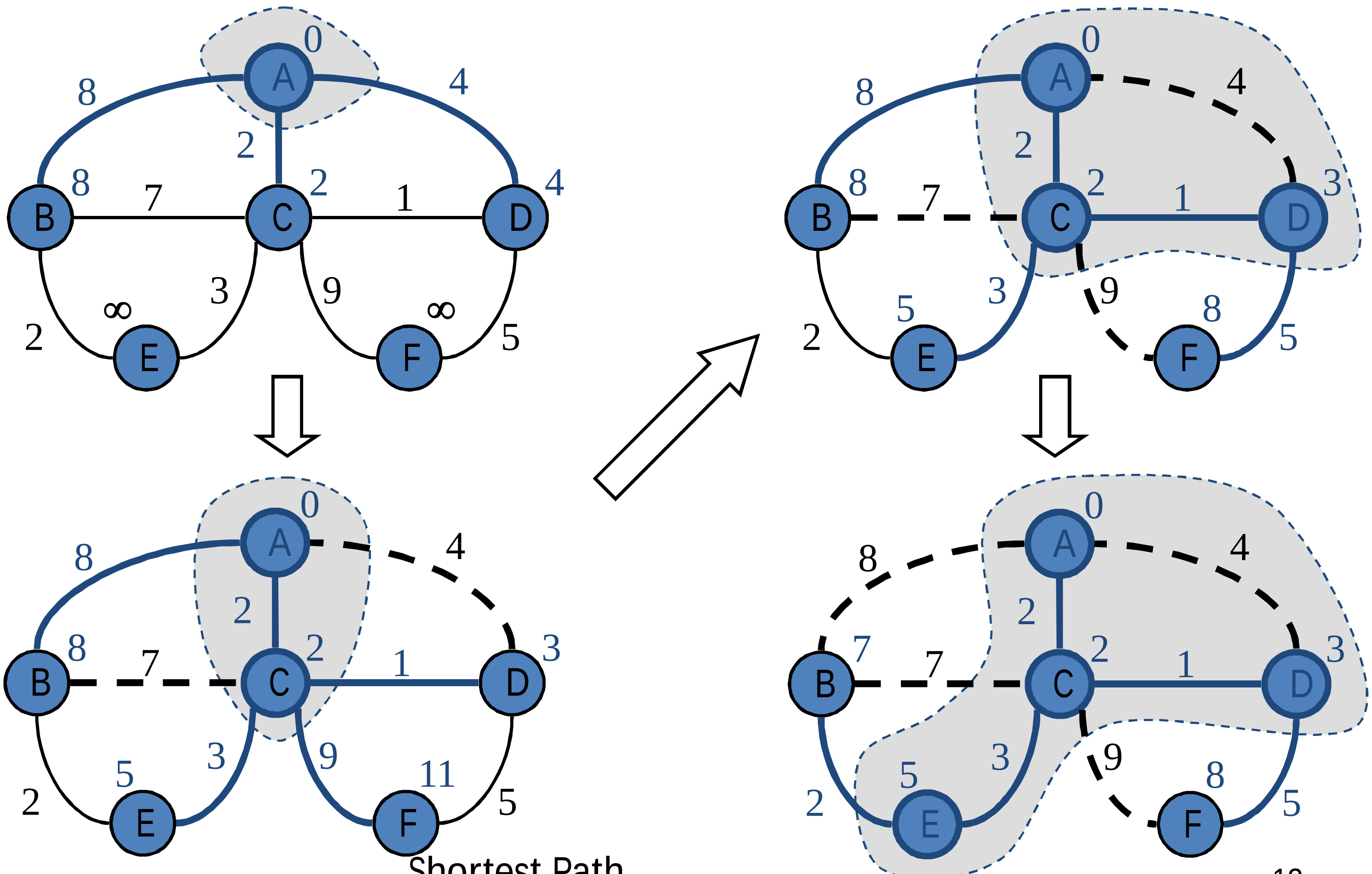
Edge Relaxation

- Θεωρείστε μια ακμή $e = (u,z)$ έτσι ώστε
  - u είναι ο κόμβος που προστέθηκε τελευταίος στο σύννεφο
  - *Ο* z δεν είναι στο σύννεφο
- Το relaxation μιας ακμής e ενημερώνει την τιμή $d(z)$ ως εξής

$$d(z) \leftarrow \min(d(z), d(u) + weight(e))$$

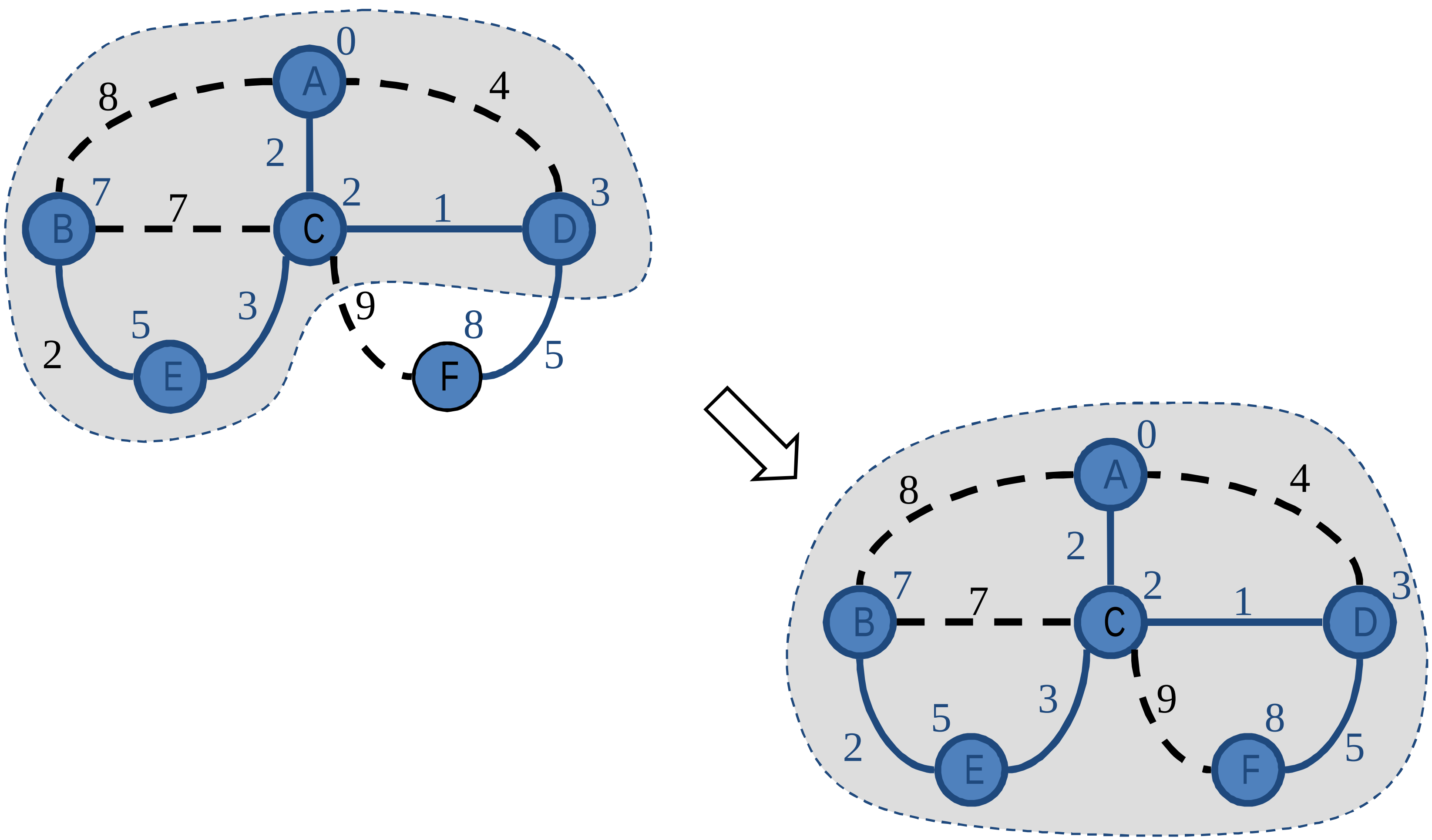


Παράδειγμα



A B C D E F
0 8 2 4 ∞ ∞
8 2 4 7 1 3 9 2 5
A B C D E F
0 8 2 3 5 11
8 2 4 7 1 3 9 2 5
A B C D E F
0 8 2 3 5 8
8 2 4 7 1 3 9 2 5
A B C D E F
0 7 2 3 5 8
8 2 4 7 1 3 9 2 5

Παράδειγμα (συν.)



Ο αλγόριθμος του Dijkstra

- Μια ουρά προτεραιότητας αποθηκεύει τους κόμβους έξω από το σύννεφο
  - Key: απόσταση
  - Element: κόμβος
- Locator-based μέθοδοι
  - *insert*(*k*,*e*) επιστρέφει έναν locator
  - *replaceKey*(*l*,*k*) αλλάζει το κλειδί ενός αντικειμένου
- Αποθηκεύουμε δύο ετικέτες για κάθε κόμβο:
  - απόσταση
  - Τον locator στην ουρά προτεραιότητας

```
Algorithm DijkstraDistances(G, s)
  Q ← new heap-based priority queue
  for all v ∈ G.vertices()
    if v = s
      setDistance(v, 0)
    else
      setDistance(v, ∞)
    l ← Q.insert(getDistance(v), v)
    setLocator(v,l)
  while ¬Q.isEmpty()
    u ← Q.removeMin()
    for all e ∈ G.incidentEdges(u)
      { relax edge e }
      z ← G.opposite(u,e)
      r ← getDistance(u) + weight(e)
      if r < getDistance(z)
        setDistance(z,r)
        Q.replaceKey(getLocator(z),r)
```

Ανάλυση

- Λειτουργίες του γράφου
  - Η μέθοδος incidentEdges καλείται μια φορά για κάθε κόμβο
- Λειτουργίες ετικετών
  - Θέτουμε και ανακτούμε τις ετικέτες απόστασης και locator ενός κόμβου $\boldsymbol{z}$ $\boldsymbol{O}(\deg(\boldsymbol{z}))$ φορές
  - Ανάθεση/ανάκτηση μιας ετικέτας παίρνει χρόνο $\boldsymbol{O}(1)$
- Λειτουργίες ουρών προτεραιότητας
  - Κάθε κόμβος εισάγεται και απομακρύνεται μια φορά από την ουρά προτεραιότητας, και κάθε τέτοια πράξη παίρνει χρόνο $\boldsymbol{O}(\log \boldsymbol{n})$
  - Το κλειδί ενός κόμβου στην ουρά προτεραιότητας τροποποιείται το πολύ $\deg(\boldsymbol{w})$ φορές, ενώ κάθε αλλαγή κλειδιού παίρνει χρόνο $\boldsymbol{O}(\log \boldsymbol{n})$
- Ο αλγόριθμος του Dijkstra εκτελείται σε χρόνο $\boldsymbol{O}((\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}) \log \boldsymbol{n})$ δεδομένου ότι ο γράφος αναπαρίσταται με την adjacency list δομή
  - Θυμηθείτε ότι $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{v}} \deg(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{m}$
- Ο χρόνος εκτέλεσης μπορεί επίσης να εκφραστεί ως $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{m} \log \boldsymbol{n})$ δεδομένου ότι ο γράφος είναι συνδεδεμένος

Επέκταση

- Χρησιμοποιώντας το template method πρότυπο,μπορούμε να επεκτείνουμε τον αλγόριθμο του Dijkstra για να επιστρέφει ένα δέντρο των συντομότερων μονοπατιών από έναν αρχικό κόμβο σε όλους τους άλλους
- Αποθηκεύουμε για κάθε κόμβο μια Τρίτη ετικέτα
  - Την ακμή πατέρα στο δέντρο συντομότερων μονοπατιών
- Στο βήμα του edge relaxation step, ενημερώνουμε την ακμή πατέρα

Algorithm *DijkstraShortestPathsTree*(G, s)

…

for all $v \in G.vertices()$
- …
- *setParent*(v, $\varnothing$)
- …
- **for all** $e \in G.incidentEdges(u)$
  - { relax edge e }
  - $z \leftarrow G.opposite(u,e)$
  - $r \leftarrow getDistance(u) + weight(e)$
  - **if** $r < getDistance(z)$
    - *setDistance*(z,r)
    - *setParent*(z,e)
    - *Q.replaceKey*(*getLocator*(z),r)

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης