ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εισαγωγή στις Βάσεις Δεδομένων ΙΙ

Ενότητα: Λογική και Θεωρία Συνόλων

Διδάσκων: Πηγουνάκης Κωστής
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται στην άδεια χρήσης **Creative Commons** και ειδικότερα

Αναφορά – Μη εμπορική Χρήση – Όχι Παράγωγο Έργο 3.0 Ελλάδα

(Attribution – Non Commercial – Non-derivatives 3.0 Greece)

R

[ή επιλογή ενός άλλου από τους έξι συνδυασμούς]

[και αντικατάσταση λογότυπου άδειας όπου αυτό έχει μπει (σελ. 1, σελ. 2 και τελευταία)]

- Εξαιρείται από την ως άνω άδεια υλικό που περιλαμβάνεται στις διαφάνειες του μαθήματος, και υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης. Η άδεια χρήσης στην οποία υπόκειται το υλικό αυτό αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Λογική & Θεωρία Συνόλων

Εισαγωγή στις Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων (ΕΒΔΟ100)

Κωστής Πηγουνάκης

Τελευταία Ενημέρωση : 11/4/2013

Τι είναι λογική;

- **1.** επιστήμη που ασχολείται με τη δομή, με τις μορφές και με τους νόμους της νόησης
  2. ακολουθία ιδεών, σκέψεων, γεγονότων με εσωτερική συνέπεια, συνάφεια

  Λεξικό της Κοινής Νεοελληνικής
  Ινστιτούτο Νεοελληνικών Σπουδών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης
  http://www.greek-language.gr/greekLang/modern_greek/tools/lexica/triantafyllides/search.html?lq=λογική&dq=
- Η λογική ασχολείται με δύο θεμελιώδεις δεξιότητες, τις οποίες θα πρέπει να έχει κάθε επιστήμονας :
  - Αφαίρεση
  - Τυπικότητα

Μαθηματική Λογική

- **Μαθηματική Λογική :** η ανάλυση των μεθόδων συλλογισμού.
- http://el.wikipedia.org/wiki/Μαθηματική_λογική

- Η Λογική ενδιαφέρεται για τη ***μορφή*** και όχι για το περιεχόμενο του συλλογισμού :
  - Όλα τα κουνέλια αγαπούν τα καρότα.
  - Ο Πλάτων είναι κουνέλι.
  - Άρα ο Πλάτων αγαπάει τα καρότα.
- Η ***μορφή*** του συλλογισμού :
  - Όλα τα Α είναι Β. Το S είναι Α. Άρα το S είναι Β.

- Η αλήθεια ή το ψεύδος των επιμέρους συλλογισμών δεν ενδιαφέρουν τη Λογική.

Ιστορική αναδρομή

- Πρώτα βήματα από τους φυσικούς φιλόσοφους της Ιωνίας, τους Ελεάτες και τους Σοφιστές
- Θεμελίωση από τον Αριστοτέλη
- Στα μοντέρνα χρόνια αναζωπύρωση με την ανακάλυψη μη-Ευκλείδιων γεωμετριών και τη θεωρητική θεμελίωση της Ανάλυσης
- Σύγχρονοι Σταθμοί :
  - Frege (1879) – τυπική γλώσσα για τα μαθηματικά και τη λογική
  - Cantor (1895-7) – Θεωρία Συνόλων
  - Russel (1930) – Αξιωματική θεμελίωση της Λογικής
  - Robinson (1965) - μέθοδος της Επίλυσης (resolution) για το χειρισμό συμβόλων και εκτέλεση μηχανικών αποδείξεων
  - Αρχές δεκαετίας 1970: οι Kowalski και Colmeraurer προτείνουν τη Λογική σαν γλώσσα προγραμματισμού (Prolog)

Λογική και Βάσεις Δεδομένων και Γνώσεων

- Η Λογική και η Θεωρία Συνόλων αποτέλεσαν τη βάση για το Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων
- Οι Βάσεις Γνώσεων αναπαριστούν γνώσεις με τη μορφή λογικών προτάσεων
- Η παραγωγή αποτελεσμάτων από βάσεις δεδομένων / γνώσεων γίνεται με ***γλώσσες ερωτημάτων (query languages)*** και ***συμπερασματικούς κανόνες (inference rules)***

Προτασιακός λογισμός :

- Ασχολείται με τη δομή των προτάσεων και τη χρήση τους στην εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Οδηγεί στην κατασκευή μιας ***τυπικής*** γλώσσας, με αυστηρούς κανόνες σχηματισμού και προτάσεων.
- Βασικά σύμβολα :
  - $\neg$ **άρνηση (δεν) – negation**
  - $\wedge$ **σύζευξη (και) - conjunction**
  - $\vee$ **διάζευξη (ή) - disjunction**
  - $\rightarrow$ **συνεπαγωγή (αν … τότε) - implication**
  - $\forall$ **για καθένα**
  - $\exists$ **υπάρχει**

Σύνθετες προτάσεις

- Σε σύνθετες προτάσεις, χρησιμοποιούμε παρενθέσεις για να μην έχουμε σύγχυση εννοιών :

  $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee \mathbf{r}$ ή $\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$
- Κατά σύμβαση η σειρά ισχύος είναι :
  - **Παρενθέσεις**
  - **Άρνηση**
  - **Σύζευξη**
  - **Διάζευξη**
  - **Συνεπαγωγή**

Από «προτάσεις» σε προτάσεις

	Προτάσεις	Τυπική Γλώσσα
K	παρατηρούνται σημεία οικονομικής ύφεσης	
C	υπάρχουν περιθώρια κοινωνικής πολιτικής	
	Αν παρατηρούνται σημεία οικονομικής ύφεσης, **τότε δεν** υπάρχουν περιθώρια κοινωνικής πολιτικής	$(K \rightarrow (\neg C))$
	Υπάρχουν περιθώρια κοινωνικής πολιτικής και παρατηρούνται σημεία οικονομικής ύφεσης	$(C \wedge K)$
	Είτε **δεν** παρατηρούνται σημεία οικονομικής ύφεσης ή **δεν** υπάρχουν περιθώρια κοινωνικής πολιτικής	$((\neg K) \vee (\neg C))$
	Ούτε παρατηρούνται σημεία οικονομικής ύφεσης ούτε υπάρχουν περιθώρια κοινωνικής πολιτικής	$((\neg K) \wedge (\neg C))$ ή $(\neg (C \vee K))$

Προτασιακοί τύποι

- Εκφράσεις : Πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων (π.χ. $\rightarrow$ A10() $\neg$)

Γενικευμένος επαγωγικός ορισμός :

- Προτασιακοί τύποι είναι οι εκφράσεις που ορίζονται, επαγωγικά, ως εξής :
  1. Τα σύμβολα προτάσεων είναι προτασιακοί τύποι
  2. Αν **p, q** προτασιακοί τύποι, τότε οι εκφράσεις $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$, $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$, $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$, $(\neg \mathbf{p})$ είναι επίσης προτασιακοί τύποι
  3. Μόνο οι εκφράσεις που σχηματίζονται με διαδοχική εφαρμογή των 1. και 2. είναι προτασιακοί τύποι.

Σημασιολογική (semantics)

- Ως **ατομική, απλή πρόταση** θεωρείται μια απλή δηλωτική πρόταση, η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής
- Η αλήθεια ή το ψεύδος μιας πρότασης σημειώνεται με την απόδοση μιας εκ των **τιμών αληθείας** - **truth values** **T** (αληθές - true) ή **F** (ψευδές - false)

Πίνακες αληθείας

p	¬p
T	F
F	T

Άρνηση

«Καθηγητές ή φοιτητές έχουν ειδική έκπτωση» :
Μη αποκλειστική διάζευξη

«Απόψε θα πάμε θέατρο ή κινηματογράφο» :
Αποκλειστική διάζευξή

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Σύζευξη

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Διάζευξη *(μη αποκλειστική)*

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Συνεπαγωγή

Παράδειγμα 1

A_1	A_2	$(A_1 \wedge A_2) \vee A_1$	$(A_1 \vee A_2) \wedge A_1$
T	T	?	?
T	F	?	?
F	T	?	?
F	F	?	?

Παράδειγμα 1

A_1	A_2	$(A_1 \wedge A_2) \vee A_1$	$(A_1 \vee A_2) \wedge A_1$
T	T	?	?
T	F	?	?
F	T	?	?
F	F	?	?

$(A_1 \wedge A_2)$	$(A_1 \wedge A_2) \vee A_1$	$(A_1 \vee A_2)$	$(A_1 \vee A_2) \wedge A_1$
T	T	T	T
F	T	T	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Παράδειγμα 2

A1	A2	$(A1 \wedge A2) \vee A2$	$(A1 \vee A2) \wedge A2$
T	T	?	?
T	F	?	?
F	T	?	?
F	F	?	?

Παράδειγμα 2

A_1	A_2	$(A_1 \wedge A_2) \vee A_2$	$(A_1 \vee A_2) \wedge A_2$
T	T	?	?
T	F	?	?
F	T	?	?
F	F	?	?

$(A_1 \wedge A_2)$	$(A_1 \wedge A_2) \vee A_2$	$(A_1 \vee A_2)$	$(A_1 \vee A_2) \wedge A_2$
T	T	T	T
F	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	F

Τι είναι σύνολο;

Ορισμός Cantor :

Σύνολο είναι μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας

ΣΥΝΟΛΟ : Μια καλώς ορισμένη συλλογή αντικειμένων

- Τα σύνολα είναι μη διατεταγμένες συλλογές στοιχείων
- Τα στοιχεία συνήθως ονομάζονται με **μικρά** γράμματα
- Τα σύνολα συνήθως ονομάζονται με **κεφαλαία** γράμματα

Σύνολα αριθμών

- $\mathbb{P}$, το σύνολο όλων των πρώτων αριθμών.
- $\mathbb{N}$, το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.
- $\mathbb{Z}$, το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών.
- $\mathbb{Q}$, το σύνολο όλων των ρητών αριθμών.
- $\mathbb{R}$, το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών.
- $\mathbb{C}$, το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών. Αυτό γράφεται και ως $\{z|z = x + \psi i,\ i^2=-1\}$.

Ορισμοί και υποσύνολα

Δύο τρόποι ορισμού ενός συνόλου:

- Απαρίθμηση A={1,3,5,7,9}
- Περιγραφή B={x|x είναι περιττός}
- Αν x ανήκει / δεν ανήκει σε ένα σύνολο C : $x \in C$ / $x \notin C$

Υποσύνολο : Το μέρος ενός συνόλου ,
π.χ. το B είναι υποσύνολο του A

- Αν το σύνολο A έχει έστω και ένα στοιχείο παραπάνω από το B, τότε το B είναι γνήσιο υποσύνολο του A :

$B \subset A$. Εάν δεν μπορεί να διασφαλιστεί αυτό, $B \subseteq A$.

Μερικοί ακόμη ορισμοί

Για τα $A,B \subseteq U$ ισχύουν :

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ ένωση

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ τομή

c) $A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$ συμμετρική διαφορά

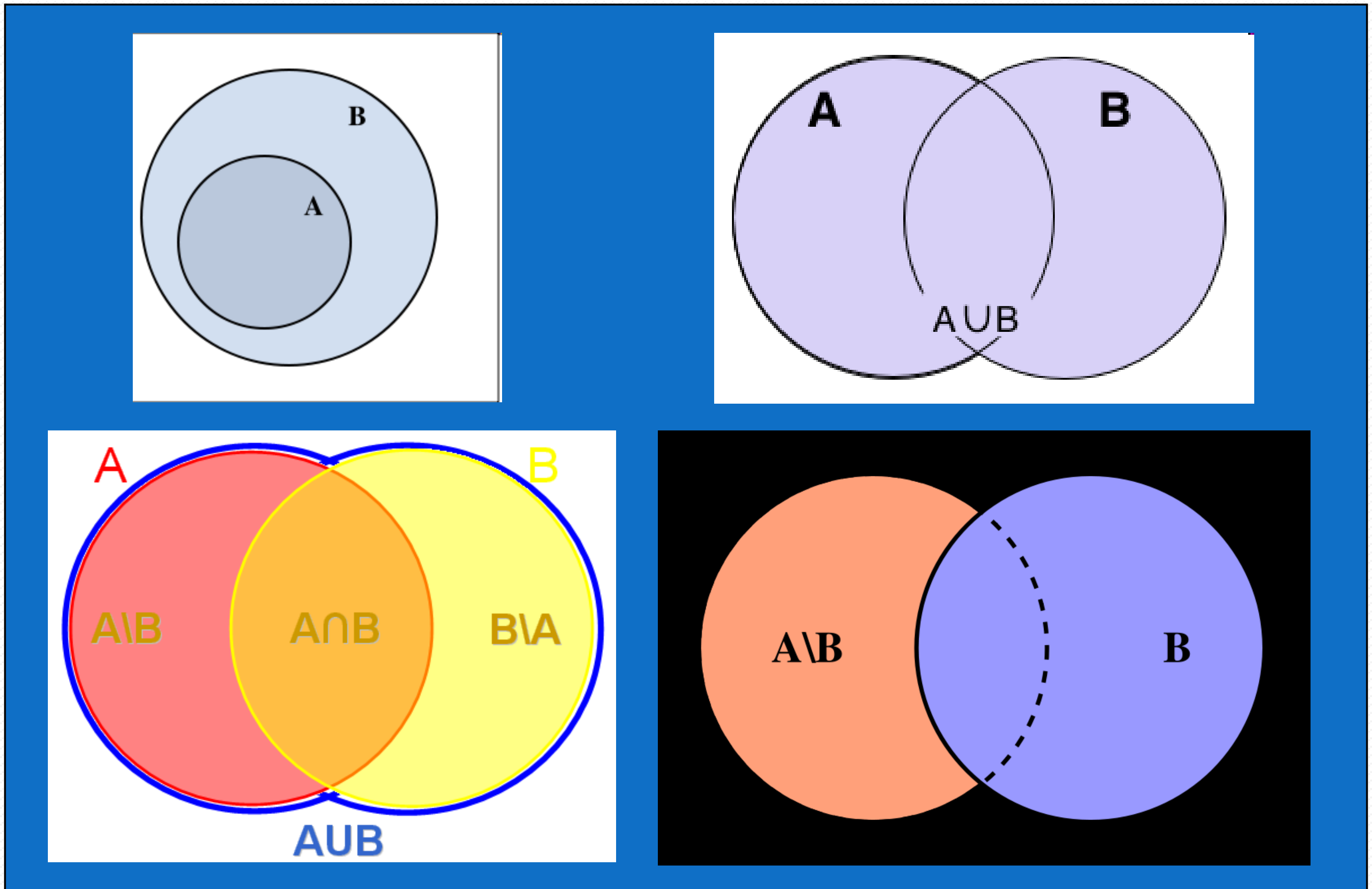
Αμοιβαίως ασύνδετα $A \cap B = \phi$

Συμπλήρωμα $\overline{A} = U - A = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$

Σχετικό συμπλήρωμα του A στο B

$$B - A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$$

Διαγράμματα Venn



Τυπικοί Ορισμοί

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \supseteq B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow A \subseteq B \vee A \supseteq B$$

Όταν τα Α και Β έχουν σχέση υπερσυνόλου - υποσυνόλου

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$ Δυναμοσύνολο του A

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

Νόμοι συνόλων (1)

(1) $\overline{\overline{A}} = A$ Νόμος Διπλού Συμπληρώματος

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ Νόμος De Morgan

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(3) $A \cup B = B \cup A$ Αντιμεταθετικοί Νόμοι

$A \cap B = B \cap A$

(4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Προσεταιριστικοί Νόμοι

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Επιμεριστικοί Νόμοι

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Νόμοι συνόλων (2)

(6) $A \cup A = A, A \cap A = A$

(7) $A \cup \varnothing = A,\ A \cap U = A$

(8) $A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \varnothing$

(9) $A \cup U = U,\ \mathrm{A} \cap \varnothing = \varnothing$

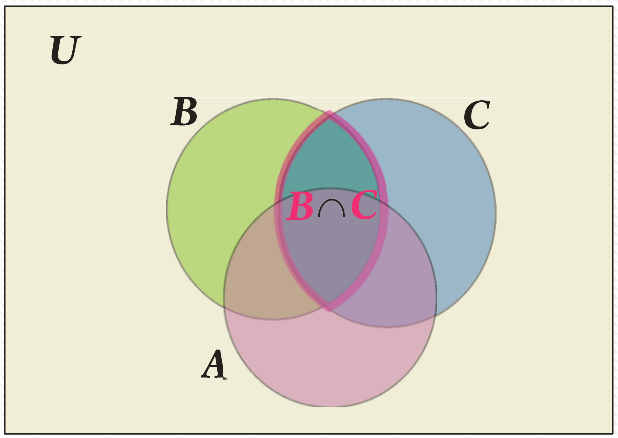
(10) $A \cup (A \cap B) = A$

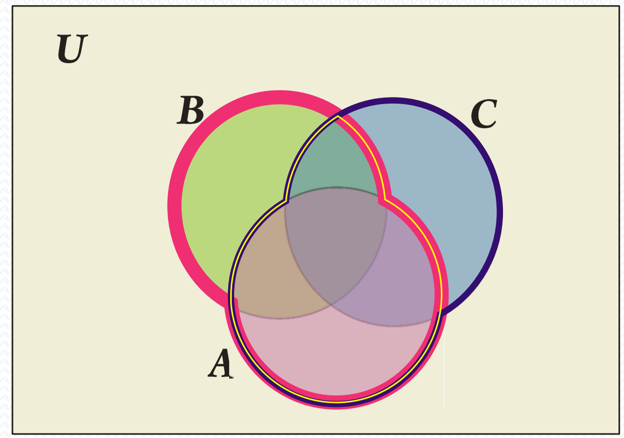
$A \cap (A \cup B) = A$

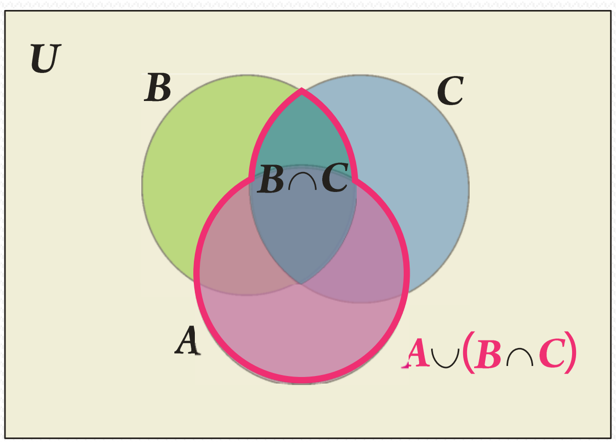
(11) $A \cup B \cup C =$

$A + B + C - (A \cap B + B \cap C + C \cap A) + A \cap B \cap C$

Παράδειγμα με διαγράμματα







$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης