



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

Τμήμα Φυσικής

Κβαντική Μηχανική Ι.

Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

Σύνολο Προβλημάτων 2

3 Οκτωβρίου 2014

Πρόβλημα 2.1 : Ένας τελεστής A ικανοποιεί μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$$(a) \quad A^\dagger = -A \quad (b) \quad A^2 = A \quad (c) \quad A^\dagger A = 4 \quad (d) \quad A^\dagger + A = 2$$

Τι μπορείτε να πείτε για τις ιδιοτιμές του σε κάθε περίπτωση;

Πρόβλημα 2.2: Υπολογίστε τους μεταθέτες

$$(a) \quad [x^2, p] \quad (b) \quad [x, xp] \quad (c) \quad [x^2, p^2] \quad (d) \quad [x^2 p, p^2]$$

Πρόβλημα 2.3 : Εάν ℓ_i είναι οι τελεστές της στροφορμής, δείξτε ότι ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις μετάθεσης

$$[\ell_i, x^j] = i\hbar \epsilon_{ijk} x^k, \quad [\ell_i, p^j] = i\hbar \epsilon_{ijk} p^k$$

Χρησιμοποιήστε τις για να δείξετε ότι

$$[\ell_i, \ell_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \ell_k, \quad [\ell_i, \ell^2] = 0, \quad \ell^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2$$

όπου ϵ_{ijk} είναι ο απολύτως αντισυμμετρικός τανυστής

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}, \quad \epsilon_{123} = 1$$

Πρόβλημα 2.4 : Δείξτε ότι ο τελεστής της ορμής, $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ είναι ερμιτιανός. Τι συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί η κυμματοσυνάρτηση για να είναι αυτό σωστό;

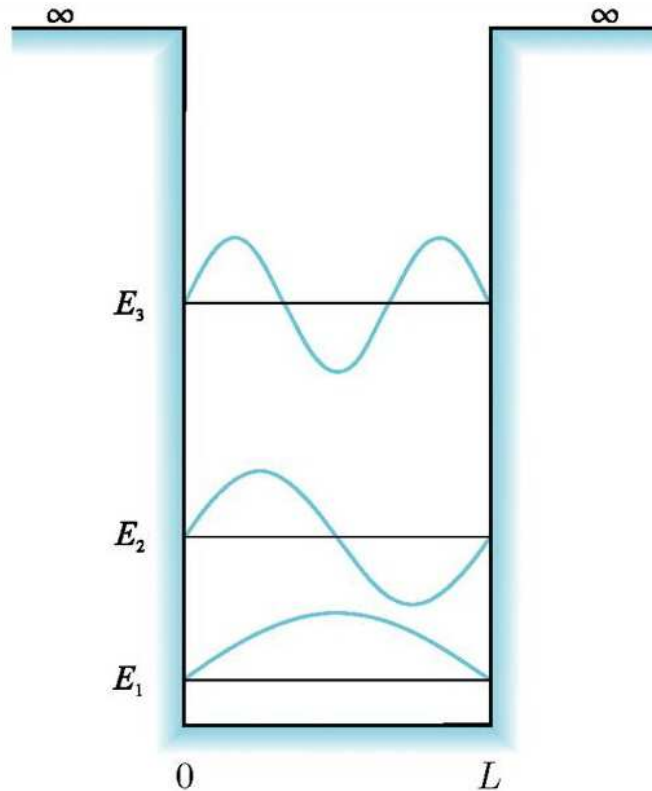
Πρόβλημα 2.5 : Δείξτε τις παρακάτω ιδιότητες της συνάρτησης δ και της παραγώγου της.

$$x\delta(x) = 0, \quad \delta'(-x) = -\delta'(x), \quad x^2\delta'(x) = 0, \quad f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x)$$

Πρόβλημα 2.6 : Η κυματοσυνάρτηση ελεύθερου σωματιδίου έχει κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ την μορφή

$$\psi(x, 0) = \frac{N}{x^2 + a^2}$$

όπου a μια δεδομένη σταθερά και N ο συντελεστής κανονικοποίησης. Βρείτε την χρονικά εξελιγμένη μορφή της κυματοσυνάρτησης. περιγράψτε τι συμβαίνει στο σωματίο με την πάροδο του χρόνου.



Πρόβλημα 2.7 : Ένα κβαντικό σωματίδιο κινείται στο πηγάδι δυναμικού της φωτογραφίας , με άπειρα υψηλούς τοίχους στο $x = 0$ και $x = L$.

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας, και τις ορθοκανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της.

(β) Αν σωματίδιο την στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην κατάσταση $\psi = \text{σταθερά}$ ($0 < x < L$). Κανονικοποιήστε αυτήν την κατάσταση. Βρείτε την κατάσταση στην οποία θα βρίσκεται μετά από χρόνο t .

(γ) Στην προηγούμενη ερώτηση, αν γίνει μια μέτρηση της ενέργειας την στιγμή $t = 0$, ποιά η πιθανότητα το σωματίο να βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση; Αν η ίδια μέτρηση γίνει την στιγμή t , ποιά η πιθανότητα το σωματίο να βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση;

(δ) Αν η ενέργεια του συστήματος μετρηθεί την στιγμή $t = 0$, και το σύστημα βρεθεί στην θεμελιώδη κατάσταση, τι θα δώσει μια καινούργια μέτρηση της ενέργειας την στιγμή t .

(ε) Για το σωματίδιο του ερωτήματος (β), ποιά η πυκνότητα πιθανότητας για να βρεθεί το σωματίο στην θέση $x = L/2$ την στιγμή $t = 0$. Ποιά η απάντηση αν η μέτρηση γίνει την στιγμή t .

(ζ) Την στιγμή $t = 0$, μετράται η ορμή του σωματιδίου και βρίσκεται να είναι q . Ποιά η πιθανότητα μετά από χρόνο t , το σωματίδιο να βρίσκεται στην n -οστή ενεργειακή στάθμη.

Πρόβλημα 2.8 : Ένα σωματίδιο είναι στην θεμελιώδη κατάσταση ενός άπειρου πηγαδιού δυναμικού με τοίχους στο $x = 0$ και στο $x = L$.

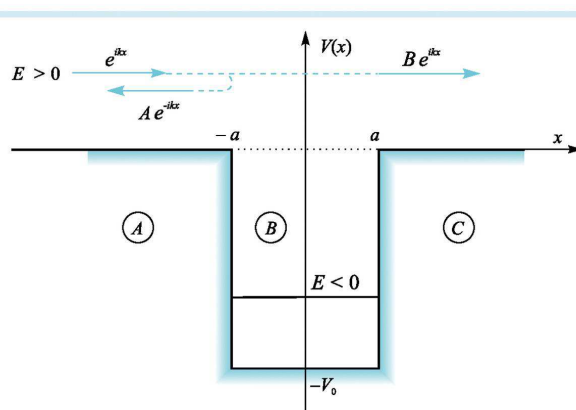
$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}, \quad \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L}$$

Σε χρόνο $t = 0$, το πηγάδι απότομα αλλάζει μέγεθος και τώρα εκτείνεται από $x = 0$ σε $x = 2L$. Η ενέργεια και η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου παραμένει η ίδια.

(α) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου για $t > 0$. Βρείτε σε χρόνο t , την πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί σε μια τυχαία ιδιοκατάσταση του καινούργιου δυναμικού.

(β) Βρείτε την αναμενόμενη (μέση) τιμή της ενέργειας για $t > 0$.

(γ) Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι τοίχοι του πηγαδιού κινούνται προς τα έξω με πεπερασμένη ταχύτητα u οι υποθέσεις μας παραπάνω θα ισχύουν αν αυτή η ταχύτητα είναι πολύ μεγαλύτερη από την χαρακτηριστική ταχύτητα του συστήματος v_0 . Ποιά είναι η v_0 ;



ΣΧΗΜΑ 3.6: Το τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού: Στην περιοχή $-V_0 < E < 0$ θα συμβεί το «φαινόμενο της κβάντωσης» και στην περιοχή $E > 0$ το φαινόμενο της «απαγορευμένης ανάκλασης» όπως και στο σκαλοπάτι δυναμικού.

Πρόβλημα 2.9: Δίνεται το δυναμικό στην παραπάνω εικόνα. Για $E < 0$ βρείτε (γραφικά) τις ιδιοτιμές της ενέργειας και τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις. Υπολογίστε αριθμητικά τις Ενέργειες των δύο χαμηλότερων σταθμών ενέργειας.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Η. Κυρίτσης 2014. «Κβαντομηχανική Ι». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

