



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

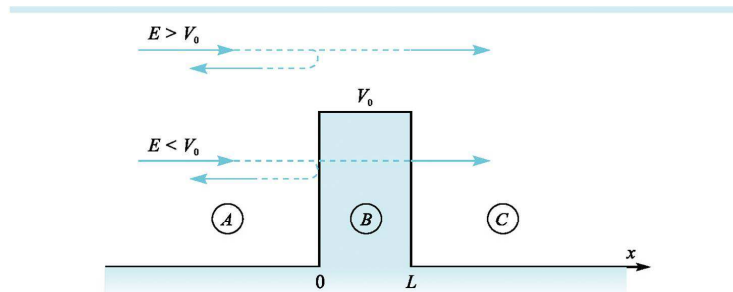
Τμήμα Φυσικής

Κβαντική Μηχανική Ι.

Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

Σύνολο Προβλημάτων 3

10 Οκτωβρίου 2014



ΣΧΗΜΑ 3.10: Σκέδαση σε ένα ορθογώνιο φράγμα δυναμικού. Ένα σωματίδιο έχει πεπερασμένη πιθανότητα να ανακλαστεί όταν η ενέργειά του του επιτρέπει να διαβεί την περιοχή του φράγματος ($E > V_0$) και πεπερασμένη πιθανότητα να το διαβεί όταν η ενέργειά του του το απαγορεύει ($E < V_0$).

Πρόβλημα 3.1 : Σε μια ορισμένη χρονική στιγμή $t = 0$, η μέση τιμή της θέσης και της ορμής ενός σωματιδίου μάζας m και φορτίου q έχουν τις τιμές

$$\langle x \rangle_0 = 0, \quad \langle p \rangle_0 = 0$$

Ποιά θα είναι η μέση θέση και η μέση ορμή του σωματιδίου μετά από χρόνο t αν το σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου εντάσεως E .

Πρόβλημα 3.2 : Γράψτε την πιο γενική συνάρτηση δυναμικού ενός κβαντικού συστήματος που έχει ως διατηρήσιμα μεγέθη αυτά που αναφέρονται στις παρακάτω περιπτώσεις

$$(a) \quad p_x \quad (\beta) \quad l_z \quad (\gamma) \quad l_z, p_z \quad (\delta) \quad l_z, p_x$$

Σχολιάστε ειδικότερα το αποτέλεσμα της περίπτωσης (δ).

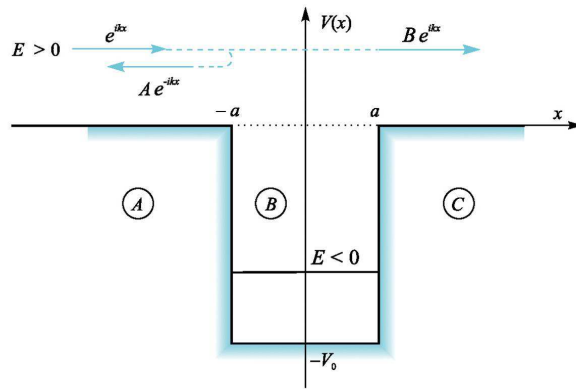
Πρόβλημα 3.3 : Δίνεται το δυναμικό στην παραπάνω εικόνα (3.10).

(α) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές της ενέργειας δεν μπορεί να είναι αρνητικές.

(β) Για $E < V_0$, βρείτε τους συντελεστές διάδοσης T και ανάκλασης R , για δέσμη σωματιδίων που έρχεται από αριστερά. Επιβεβαιώστε ότι $R + T = 1$.

(γ) Για $E > V_0$, βρείτε τους συντελεστές διάδοσης T και ανάκλασης R , για δέσμη σωματιδίων που έρχεται από αριστερά. Επιβεβαιώστε ότι $R + T = 1$. Τι συμβαίνει όταν $E = V_0$;

(δ) Βρείτε προσεγγιστική έκφραση για τον συντελεστή διάδοσης T , όταν $L\sqrt{2m|E - V_0|} \gg \hbar$.



ΣΧΗΜΑ 3.6: Το τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού: Στην περιοχή $-V_0 < E < 0$ θα συμβεί το «φαινόμενο της κβάντωσης» και στην περιοχή $E > 0$ το φαινόμενο της «απαγορευμένης ανάκλασης» όπως και στο σκαλοπάτι δυναμικού.

Πρόβλημα 3.4: Δίνεται το δυναμικό στην παραπάνω εικόνα (3.6).

(α) Για $E > 0$, δείξτε ότι το ενεργειακό φάσμα είναι συνεχές. Βρείτε τους συντελεστές διάδοσης T και ανάκλασης R , για δέσμη σωματιδίων που έρχεται από αριστερά. Βρείτε τους πόλους του T στο μιγαδικό επίπεδο. Τι σχέση έχουν με τις δέσμιες καταστάσεις;

(β) Διατηρείται η ομοτιμία στο παραπάνω σύστημα και γιατί; Ποιες οι ιδιοτιμές της ομοτιμίας σε κάθε ενεργειακή κατάσταση;

Πρόβλημα 3.5 : Βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας και τις ιδιοσυναρτήσεις στο κβαντομηχανικό πρόβλημα με δυναμικό $V = -kx$, στην αναπαράσταση της θέσης και στην αναπαράσταση της ορμής. Ποιά είναι πιο εύκολη;

Πρόβλημα 3.6 : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Βρείτε τα ιδιοδιανύσματά του και τις ιδιοτιμές του. Κανονικοποιήστε τα ιδιοδιανύσματα και βρείτε τους πίνακες προβολής πάνω στις κατευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων.

Πρόβλημα 3.7 : (α) Να βρείτε τις μη δέσμιες καταστάσεις στο δυναμικό

$$V = -A\delta(x)$$

και να υπολογίσετε τους συντελεστές ανάκλασης και διάβασης.

(β) Να υπολογίσετε όλες τις δέσμιες καταστάσεις, τις ενέργειες και τις κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις.

(γ) Συγκρίνετε στο κατάλληλο όριο την λύση του παρόντος προβλήματος με αυτό των προβλημάτων 3.4 και 2.9.

Πρόβλημα 3.8 : Σε ένα κβαντικό σύστημα με δύο πιθανές γραμμικά ανεξάρτητες καταστάσεις, με βασικά διανύσματα τα $|1\rangle$ και $|2\rangle$, η Χαμιλτονιανή του συστήματος περιγράφεται από τον ερμιτιανό πίνακα

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

όπου ϵ μια δεδομένη πραγματική σταθερά με διαστάσεις ενέργειας. Αν η κατάσταση του συστήματος για $t = 0$ συμπίπτει με την κατάσταση $|1\rangle$ υπολογίστε την πιθανότητα μετά από χρόνο t να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $|2\rangle$.

Πρόβλημα 3.9 : Επικαλεσθείτε τον ρόλο των τελεστών ορμής και στροφορμής σαν γεννητόρων των μετατοπίσεων και των στροφών αντίστοιχα για να εξηγήσετε χωρίς πράξεις τον μηδενισμό των μεταθετών που ακολουθούν:

$$[p_x, y] = 0 \quad , \quad [p_x, z] = 0 \quad , \quad [p_i, F(\vec{p})] = 0 \quad , \quad [\ell_z, z] = 0 \quad , \quad [\ell_z, p_z] = 0$$

$$[\ell_z, F(x^2 + y^2)] = 0 \quad , \quad \ell_i, \vec{r} \cdot \vec{p}] = 0 \quad , \quad [\ell_i, \vec{\ell}^2] = 0 \quad , \quad [\ell_i, \vec{p}^2] = 0 \quad , \quad [\ell_i, \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)] = 0$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Η. Κυρίτσης 2014. «Κβαντομηχανική Ι». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

