



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

Τμήμα Φυσικής

Κβαντική Μηχανική Ι.

Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

Σύνολο Προβλημάτων 4

17 Οκτωβρίου 2014

Πρόβλημα 4.1 :Ένα στατιστικό μίγμα αποτελείται κατά πενήντα % το καθένα από τις παρακάτω καταστάσεις

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \quad , \quad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle)$$

όπου $|1\rangle$, $|2\rangle$ και $|3\rangle$ είναι τα βασικά διανύσματα ενός κβαντικού συστήματος τριών καταστάσεων.

(α) Γράψτε τον 3×3 πίνακα πυκνότητας που περιγράφει το στατιστικό μίγμα, και βεβαιωθείτε ότι έχει όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες.

(β) Στο εν λόγω σύστημα, ένα μέγεθος αναπαρίσταται από έναν 3×3 ερμιτιανό πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε την μέση τιμή του στο παραπάνω στατιστικό μίγμα.

Πρόβλημα 4.2 : Ένα κβαντομηχανικό σύστημα περιγράφεται από ένα δισδιάστατο χώρο με ορθοκανονική βάση, $|1\rangle, |2\rangle$. Το σύστημα είναι σε μια μεικτή κατάσταση και είναι γνωστό ότι μπορεί να βρεθεί στις καταστάσεις, $|1\rangle, |2\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ με αντίστοιχες πιθανότητες (p_1, p_2, p_3) .

(α) Να βρείτε τον πίνακα πυκνότητας που περιγράφει το σύστημα και να υπολογίσετε το $Tr[\rho^2]$.

(β) Βρείτε την βάση στον δισδιάστατο χώρο στην οποία ο πίνακας πυκνότητας είναι διαγώνιος. Τα διαγώνια στοιχεία μπορείτε να τα θεωρήσετε πιθανότητες;

(γ) Υποθέσατε γενικά ότι ένα σύστημα μπορεί να βρεθεί στις καταστάσεις $|\psi_i\rangle$, με πιθανότητες p_i , $\sum_i p_i = 1$. Θεωρείστε τις καταστάσεις $|\psi_i\rangle$, κανονικοποιημένες ($\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$) αλλά όχι αναγκαστικά ορθογώνιες ($\langle\psi_i|\psi_j\rangle \neq 0$, $i \neq j$). Δείξτε γενικά ότι ο τελεστής πυκνότητας ικανοποιεί

$$Tr[\rho] = 1 \quad , \quad Tr[\rho^2] \leq 1$$

Πρόβλημα 4.3 (α) Αρχίζοντας από την εξίσωση του Schrödinger για τυχαία κατάσταση $|\psi\rangle$, με Χαμιλτονιανή \hat{H}

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

και την κανονική σχέση μετάθεσης

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

δείξτε ότι ο τελεστής της ορμής \hat{p}_x δρα ως $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ στην κυματοσυνάρτηση στην αναπαράσταση της θέσης, $\tilde{\psi}(x) \equiv \langle x|\psi\rangle$ και η εξίσωση του Schrödinger γίνεται

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \tilde{\psi}$$

(β) Δείξτε ότι στην αναπαράσταση της ορμής η εξίσωση του Schrödinger για την αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση, $\chi(p) \equiv \langle p|\psi\rangle$ γίνεται

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \left[\frac{p^2}{2m} + V \left(i\hbar \frac{d}{dp} \right) \right] \tilde{\psi}$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Η. Κυρίτσης 2014. «Κβαντομηχανική Ι». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

