



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

Τμήμα Φυσικής

Κβαντική Μηχανική Ι.

Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

Σύνολο Προβλημάτων 6

31 Οκτωβρίου 2014

Πρόβλημα 6.1 : Υπολογίστε $\langle m|x^4|n\rangle$.

Πρόβλημα 6.2 : Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο δύο σύμφωνων καταστάσεων $\langle \alpha|\beta\rangle$, με παραμέτρους $\alpha, \beta \in C$.

Πρόβλημα 6.3 : Θεωρείστε έναν αρμονικό ταλαντωτή με δυναμική ενέργεια $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Η αρχική κυματοσυνάρτηση σε $t = 0$ είναι

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{|x|}\right) f(x)$$

με πραγματική και κανονικοποιημένη $f(x)$, που είναι περιττή κάτω από την ανάκλαση στο x ($f(-x) = -f(x)$).

(α) Είναι η $\psi(x, 0)$ κανονικοποιημένη;

(β) Ποιά είναι η αρχική πυκνότητα πιθανότητας στο σημείο $x = 0$.

(γ) Ποιά είναι η αρχική πιθανότητα να βρει κάποιος το σωματίδιο $[0, +\infty]$. Ποιά είναι η αρχική πιθανότητα να βρεθεί στο $[-\infty, 0]$.

(δ) Ποιά είναι η ισοτιμία της αρχικής κυματοσυνάρτησης; Ποιά είναι η ισοτιμία για $t > 0$.

(ε) Υπάρχει χρόνος t_1 πού θα είμαστε σίγουροι ότι το σωματίδιο θα είναι στην περιοχή $x \geq 0$.

(ζ) Υπάρχει χρόνος $T > 0$ πού θα είμαστε σίγουροι ότι το σωματίδιο θα είναι στην περιοχή $x \leq 0$.

(η) Υπολογίστε τις πυκνότητες ρεύματος, $J(x, 0)$, $J(x, t_1)$, $J(x, T)$.

(θ) Υπάρχει χρόνος t_2 , στον οποίο οι πιθανότητες το σωματίδιο να βρεθεί στο $x \geq 0$ ή στο $x \leq 0$ να είναι ίσες;

Πρόβλημα 6.4 : (ΔΥΣΚΟΛΟ) Θεωρείστε ένα δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή με μια επιπλέον συνάρτηση δέλτα,

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{\hbar^2g}{2m}\delta(x)$$

(α) Παρατηρείστε ότι εξαιτίας της συμμετρίας της ισοτιμίας οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας είναι άρτιες και περιττές. Παρατηρείστε ακόμα ότι οι περιττές ιδιοκαταστάσεις $\psi_{2\nu+1}(x)$ του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι και εδώ ιδιοκαταστάσεις με ιδιοτιμές $E_{2\nu+1} = \hbar\omega (2\nu + 1 + \frac{1}{2})$, για $\nu = 0, 1, \dots$.

(β) Εκφράστε τις άρτιες ιδιοκαταστάσεις του παρόντος συστήματος, $\psi_E(x)$ σε γραμμικό συνδυασμό των άρτιων ιδιοκαταστάσεων του απλού αρμονικού ταλαντωτή, $\psi_{2\nu}(x)$,

$$\psi_E(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} \psi_{2\nu}(x)$$

Αντικαταστήστε αυτή την έκφραση στην εξίσωση Schrödinger και υπολογίστε τις σταθερές C_{ν} , πολλαπλασιάζοντας με $\psi_{2\nu}$ και ολοκληρώνοντας.

(γ) Δείξτε ότι οι Ενεργειακές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε άρτιες καταστάσεις είναι λύσεις τις εξίσωσης

$$\frac{2}{g} = -\sqrt{\frac{\hbar}{m\pi\omega}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} \left(2\nu + \frac{1}{2} - \frac{E}{\hbar\omega}\right)^{-1}$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι για τις ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή

$$\psi_{2\nu}(0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{(2\nu)!}}{2^{\nu}\nu!}$$

(δ) Θεωρείστε τις παρακάτω περιπτώσεις: (1) $g > 0, E > 0$, (2) $g < 0, E > 0$ (3) $g < 0, E < 0$ και δείξτε ότι η πρώτη και δεύτερη περίπτωση αντιστοιχούν σε μια απειρία από ενεργειακές στάθμες. Μπορείτε να τις τοποθετήσετε σχετικά με αυτές στον τύπο $E_{2\nu} = \hbar\omega (2\nu + \frac{1}{2})$; Δείξτε ότι στην τρίτη περίπτωση μόνο μια ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στην θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{4^j(j!)^2} \frac{1}{2j+1-x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma[\frac{1-x}{2}]}{\Gamma[1-\frac{x}{2}]}$$

Πρόβλημα 6.5 : Περάστε από καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) , σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ)

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

(α) Βρείτε τις συνιστώσες του διαφορικού τελεστή $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, σε σφαιρικές συντεταγμένες.

(β) Βρείτε την έκφραση των τελεστών της στροφορμής, σε σφαιρικές συντεταγμένες και επιβεβαιώστε ότι

$$\hat{\ell}_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad \hat{\ell}_y = i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad \hat{\ell}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1)$$

(γ) Χρησιμοποιήστε τις εκφράσεις (1) για να επιβεβαιώσετε τις σχέσεις μετάθεσης της στροφορμής.

(δ) Υπολογίστε τον τελεστή του μέτρου της στροφορμής σε σφαιρικές συντεταγμένες και δείξτε ότι με μετατίθεται με τους $\hat{\ell}_i$.

(ε) Δείξτε ότι

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \hat{\ell}^2$$

(ζ) Θεωρήστε μια τυχαία συνάρτηση $f(\theta, \phi)$. Είναι δυνατό να γραφτεί σαν σειρά

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell,m} Y^{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Αν ναι, βρείτε τους συντελεστές $c_{\ell,m}$.

(η) Αναπτύξτε το $\cos^2 \theta$ σε σειρά των σφαιρικών αρμονικών.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Η. Κυρίτσης 2014. «Κβαντομηχανική Ι». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

