



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

Τμήμα Φυσικής

Κβαντική Μηχανική Ι.

Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

Σύνολο Προβλημάτων 7

7 Νοεμβρίου 2014

Πρόβλημα 7.1 : Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών

$$a) \ell_x^2 + \ell_y^2 \quad b) \ell_x^2 + \ell_y^2 - \ell_z^4 \quad c) \ell_+ \ell_+^2 \ell_-$$

Πρόβλημα 7.2 : Η Χαμιλτονιανή ενός κβαντικού συστήματος με μόνο περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας (πχ. ενός στερεού στροφέα) έχει την μορφή

$$H = \alpha \vec{\ell}^2 + \beta (\ell_x + \ell_y + \ell_z)$$

- (α) Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες ενέργειες του συστήματος.
- (β) Υπολογίστε τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις αν $\ell = 1$.
- (γ) Πώς θα μπορούσατε να βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις για τυχαίο ℓ .

Πρόβλημα 7.3: Σε ένα κατάλληλο σύστημα μονάδων η χαμιλτονιανή ενός συστήματος έχει την μορφή

$$H = \vec{\ell}^2 + \ell_z$$

Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις Heisenberg για να βρείτε την χρονικά εξελιγμένη μορφή των τελεστών ℓ_x, ℓ_y .

Πρόβλημα 7.4 : Θεωρήστε μια κατάσταση με τροχιακή στροφορμή $\ell = 1$,

$$|\psi\rangle = C_0|1, 0\rangle + C_{-1}|1, -1\rangle + C_1|1, 1\rangle$$

(α) Βρείτε μια διεύθυνση (καθοριζόμενη από το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n}) ώστε αυτή η κατάσταση να είναι ιδιοκατάσταση του $\hat{n} \cdot \vec{L}$. Εκφράστε τους συντελεστές $C_{0,\pm 1}$ σαν συνάρτηση των γωνιών θ και ϕ που καθορίζουν το μοναδιαίο διάνυσμα,

$$\hat{n} = (n_x, n_y, z_z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

(β) Βρείτε τις εκφράσεις των ιδιοδιανυσμάτων του L_y ,

$$|1, L_y = 0\rangle, |1, L_y = \hbar\rangle, |1, L_y = -\hbar\rangle$$

συναρτήσει των $|1, 0\rangle, |1, \pm 1\rangle$.

Κάντε το ίδιο για ιδιοδιανύσματα του L_x .

Πρόβλημα 7.5 : Λύσατε ξανά το πρόβλημα 5.2, με $k_1 = k_2 = k_3 = m\omega^2$.

(α) Δείξτε ότι το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία. Υπολογίστε τις κοινές ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής και της στροφορμής (σε σφαιρικές συντεταγμένες). Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές της ενέργειας είναι

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega \left(2n + \ell + \frac{3}{2} \right)$$

όπου n είναι ο 'κύριος' κβαντικός αριθμός και ℓ είναι ο κβαντικός αριθμός της ολικής στροφορμής.

(β) Μελετήστε τον εκφυλισμό των ενεργειακών καταστάσεων. Αναλύσατε κάθε εκφυλισμένο υπόχωρο σε αναπαραστάσεις της στροφορμής.

(γ) Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά του προβλήματος 5.2 όπου χρησιμοποιήσατε άλλη βάση για να περιγράψετε τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας.

Πρόβλημα 7.6 : Ένα ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου. Βρείτε την πιθανότητα να το βρούμε σε αποστάσεις από τον πυρήνα μικρότερες από: (α) μια ακτίνα Bohr, (β) δυο ακτίνες Bohr, (γ) τρεις ακτίνες Bohr.

Πρόβλημα 7.7 : Το ηλεκτρόνιο και το αντισωματίό του το ποζιτρόνιο (σωμάτιο της ίδιας μάζας και αντίθετου φορτίου) σχηματίζουν ένα δέσμιο σύστημα που λέγεται ποζιτρόνιο. Υπολογίστε τα εξής:

(α) Την ενέργεια διάσπασης του ποζιτρόνιου όταν βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση.

(β) Την μέση απόσταση ηλεκτρονίου και ποζιτρονίου στην προηγούμενη κατάσταση.

Πρόβλημα 7.8 : Βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις ενός σωματιδίου που κινείται σε κεντρικό δυναμικό στο όριο που το $V(r) \rightarrow 0$. Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές χαρακτηρίζονται από την ενέργεια, την ολική στροφορμή και την προβολή της στον άξονα των z . Συγκρίνετε αυτές με τις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας σε καρτεσιανών συντεταγμένες που είναι επίσης και ιδιοσυναρτήσεις των ορμών, p_x, p_y, p_z .

Πρόβλημα 7.9 : Βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ενός σωματιδίου σε ένα σφαιρικό δυναμικό

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a, \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Η. Κυρίτσης 2014. «Κβαντομηχανική Ι». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

