



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

Τμήμα Φυσικής

Κβαντική Μηχανική Ι.

Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

Σύνολο Προβλημάτων 8

21 Νοεμβρίου 2014

Πρόβλημα 8.1 : Η μέση τιμή της συνιστώσας z του σπίν ενός σωματιδίου με $s = \frac{1}{2}$ είναι ίση με $-\frac{1}{6}$. Ποιες οι πιθανότητες να βρούμε το σωματίδιο με σπίν $+\frac{1}{2}$ ή $-\frac{1}{2}$ στον άξονα των z ;

Πρόβλημα 8.2: Μια μέτρηση της προβολής του σπίν κατά τον άξονα των x έδωσε την τιμή $s_x = \frac{1}{2}$.

(α) Ποιο διάνυσμα στήλης περιγράφει την κατάσταση σπίν του σωματιδίου μετά την παραπάνω μέτρηση;

(β) Αν σε αυτή την κατάσταση μετρηθεί η προβολή του σπίν κατά τον άξονα z , με τι πιθανότητες θα προκύψουν οι τιμές $+\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}$;

(γ) Αν στην ίδια όπως πριν κατάσταση μετρηθεί η προβολή του σπίν κατά την κατεύθυνση $\vec{n} = (3, 0, 4)$, ποιες θα είναι οι πιθανότητες εμφάνισης των τιμών $\pm\frac{1}{2}$;

Πρόβλημα 8.3 : Χρησιμοποιήστε την αλγεβρική θεωρία της στροφορμής για να κατασκευάσετε τις μήτρες του σπίν $s = \frac{3}{2}$.

Πρόβλημα 8.4 : Κατασκευάστε την μήτρα χρονικής εξέλιξης για την κίνηση σωματιδίου με $s = 1$ και γυρομαγνητικό λόγο $\gamma > 0$ μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο εντάσεως B κατά τον άξονα των x , και υπολογίστε βάση αυτής την πιθανότητα μετά από χρόνο t , να βρεθεί το σωματίδιο με $s_z = 1, 0, -1$, αν βρισκόταν αρχικά στην κατάσταση με

(α) $s_z = 1$.

(β) $s_z = 0$.

(γ) $s_z = -1$.

Πρόβλημα 8.5 : Δύο σωματίδια με σπίν $s_1 = \frac{3}{2}$ και $s_2 = \frac{5}{2}$ αλληλεπιδρούν σύμφωνα με την Χαμιλτονιανή

$$H = A \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

όπου A μια δεδομένη σταθερά. Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος καθώς και τον βαθμό εκφυλισμού της κάθε μίας.

Πρόβλημα 8.6 : Δύο στροφορμές $\vec{\ell}$ και \vec{s} , όχι κατ' ανάγκη τροχιακή και σπίν αντίστοιχα, αλληλεπιδρούν μέσω της Χαμιλτονιανής $H = A \vec{\ell} \cdot \vec{s}$, όπου A μια δεδομένη σταθερά.

(α) Ποιά είναι και ποιά δεν είναι διατηρήσιμα μεγέθη του συστήματος;

(β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος για δεδομένα ℓ και s .

(γ) Γράψτε τις εξισώσεις χρονικής μεταβολής των μέσων τιμών $\langle \vec{\ell} \rangle$ και $\langle \vec{s} \rangle$ και συμπεράνετε πώς κινούνται τα διανύσματα $\langle \vec{\ell} \rangle$ και $\langle \vec{s} \rangle$ στον χώρο.

Πρόβλημα 8.7 : Δείξτε ότι η γενική μήτρα στροφής για σωματίδια με $s = 1$ δίνεται από την σχέση

$$U(\hat{n}, \phi) = e^{-i\phi s_n} = 1 - i \sin \phi s_n + (\cos \phi - 1) s_n^2, \quad s_n \equiv \hat{n} \cdot \vec{s}$$

όπου \hat{n} ($\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$) η κατεύθυνση του άξονα στροφής και ϕ η γωνία στροφής. Χρησιμοποιήστε κατάλληλα αυτήν την εξίσωση για να κατασκευάσετε τα ιδιοδιανύσματα του σπίν κατά τις κατευθύνσεις x και y .

Πρόβλημα 8.8 (Δύσκολο) : Οι γωνίες του Euler. Μια τυχαία στροφή στις τρεις διαστάσεις μπορεί να παραμετρισθεί από 3 γωνίες α, β, γ , γνωστές σαν γωνίες του Euler. Ο γενικός τελεστής μιας τυχαίας στροφής με αυτή την παραμέτρηση είναι

$$U(\alpha, \beta, \gamma) \equiv e^{-i\alpha L_z} e^{-i\beta L_y} e^{-i\gamma L_z}$$

όπου $L_{x,y,z}$ είναι οι αντίστοιχες συνιστώσες της στροφορμής.

(α) Δείξτε ότι ο U περιγράφει διαδοχικά μια στροφή κατά γωνία γ γύρω από τον άξονα των z , μια στροφή κατά γωνία β γύρω από τον άξονα των y και μια στροφή κατά γωνία α γύρω από τον άξονα των z .

(β) Τα στοιχεία πίνακα του μοναδιαίου τελεστή U , στην γνωστή ορθοκανονική βάση $|\ell, m\rangle$, δίνονται από την σχέση

$$D_{m,m'}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \langle \ell, m | U(\alpha, \beta, \gamma) | \ell, m' \rangle = e^{i\alpha m} d_{mm'}^{(\ell)}(\beta) e^{-i\gamma m'}$$

όπου

$$d_{mm'}^{(\ell)}(\beta) = \langle \ell, m | U e^{-i\beta L_y} | \ell, m' \rangle .$$

Δείξτε την παραπάνω σχέση.

(γ) Οι συντελεστές $d_{mm'}^{(\ell)}(\beta)$, δίνονται από τον τύπο του Wigner

$$d_{mm'}^{(\ell)}(\beta) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!(\ell-m)!}{(\ell+m')!(\ell-m')!}} \sum_n \binom{\ell+m'}{\ell-m-n} \binom{\ell-m'}{n} (-1)^{\ell-m'-n} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2n+m+m'} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2\ell-2n-m}$$

. Για να αποδείξουμε τον τύπο του Wigner, θα κάνουμε την παρακάτω κατασκευή χρησιμοποιώντας δύο σπινორιακές μεταβλητές, x_+, x_- , έτσι ώστε το άνυσμα $\begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix}$ να μετασχηματίζεται σαν σπινόρας με σπιν $1/2$.

(δ) Δείξτε ότι οι τελεστές

$$J_x = \frac{1}{2} \left(x_- \frac{\partial}{\partial x_+} + x_+ \frac{\partial}{\partial x_-} \right) , \quad J_y = \frac{i}{2} \left(x_- \frac{\partial}{\partial x_+} - x_+ \frac{\partial}{\partial x_-} \right) , \quad J_z = \frac{1}{2} \left(x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} - x_- \frac{\partial}{\partial x_-} \right)$$

ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης της στροφορμής

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k .$$

(ε) Δείξτε ότι

$$J_{\pm} = x_{\pm} \frac{\partial}{\partial x_{\mp}} , \quad \vec{J}^2 = k(k+1) , \quad k \equiv \frac{1}{2} \left(x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} + x_- \frac{\partial}{\partial x_-} \right)$$

(ζ) Δείξτε ότι η δράση των J_i σε μονώνυμα $x_+^a x_-^b$, διατηρεί αναλλοίωτο το άθροισμα των εκθετών $a + b$. Συμπεράνατε ότι τα μονώνυμα $x_+^{\ell+m} x_-^{\ell-m}$, με $m = \ell, \ell-1, \dots, -\ell+1, -\ell$, αποτελούν μια βάση που ισοδυναμεί στα ανύσματα $|\ell, m\rangle$. Δείξτε ότι για να ισχύει η σχέση

$$J_{\pm} u_{\ell, m} = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} u_{\ell, m \pm 1}$$

τα μονώνυμα πρέπει να κανονικοποιηθούν ως

$$u_{\ell, m} = \frac{x_+^{\ell+m} x_-^{\ell-m}}{\sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!}}$$

(η) Κάνετε τώρα μία στροφή με γωνίες $\alpha=\gamma=0, \beta$. Δείξτε ότι ο σπινόρας μετασχηματίζεται ως εξής

$$x'_+ = x_+ \cos \frac{\beta}{2} + x_- \sin \frac{\beta}{2} , \quad x'_- = -x_+ \sin \frac{\beta}{2} + x_- \cos \frac{\beta}{2}$$

(θ) Συμπεράνατε ότι τα μονώνυμα της βάσης $u_{\ell, m}$, θα μετασχηματιστούν κάτω από αυτήν την στροφή ως

$$u'_{\ell, m} = \frac{(x'_+)^{\ell+m} (x'_-)^{\ell-m}}{\sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!}}$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι

$$u'_{\ell, m'} = U(0, \beta, 0) u_{\ell, m} = \sum_m U(0, \beta, 0)_{mm'} u_{\ell, m} = \sum_m d_{mm'}^{(\ell)}(\beta) \frac{x_+^{\ell+m} x_-^{\ell-m}}{\sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!}}$$

Δείξτε ότι αυτή η σχέση οδηγεί στον τύπο του Wigner .

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Η. Κυρίτσης 2014. «Κβαντομηχανική Ι». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

