ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

Τμήμα Φυσικής

Κβαντική Μηχανική Ι.

Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

Σύνολο Προβλημάτων 8

21 Νοεμβρίου 2014

Πρόβλημα 8.1 : Η μέση τιμή της συνιστώσας z του σπίν ενός σωματιδίου με $s = \frac{1}{2}$ είναι ίση με $-\frac{1}{6}$. Ποιες οι πιθανότητες να βρούμε το σωματίδιο με σπίν $+\frac{1}{2}$ ή $-\frac{1}{2}$ στον άξονα των z;

Πρόβλημα 8.2: Μια μέτρηση της προβολής του σπίν κατά τον άξονα των x έδωσε την τιμή $s_x = \frac{1}{2}$.

(α) Ποιο διάνυσμα στήλης περιγράφει την κατάσταση σπίν του σωματιδίου μετά την παραπάνω μέτρηση;

(β) Αν σε αυτή την κατάσταση μετρηθεί η προβολή του σπίν κατά τον άξονα z, με τι πιθανότητες θα προκύψουν οι τιμές $+\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}$;

(γ) Αν στην ίδια όπως πριν κατάσταση μετρηθεί η προβολή του σπίν κατά την κατεύθυνση $\vec{n} = (3, 0, 4)$, ποιες θα είναι οι πιθανότητες εμφάνισης των τιμών $\pm\frac{1}{2}$;

Πρόβλημα 8.3 : Χρησιμοποιήστε την αλγεβρική θεωρία της στροφορμής για να κατασκευάσετε τις μήτρες του σπίν $s = \frac{3}{2}$.

Πρόβλημα 8.4 : Κατασκευάστε την μήτρα χρονικής εξέλιξης για την κίνηση σωματιδίου με $s = 1$ και γυρομαγνητικό λόγο $\gamma > 0$ μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο εντάσεως B κατά τον άξονα των x, και υπολογίστε βάση αυτής την πιθανότητα μετά από χρόνο t, να βρεθεί το σωματίδιο με $s_z = 1, 0, -1$, αν βρισκόταν αρχικά στην κατάσταση με

(α) $s_z = 1$.

(β) $s_z = 0$.

(γ) $s_z = -1$.

Πρόβλημα 8.5 : Δύο σωματίδια με σπίν $s_1 = \frac{3}{2}$ και $s_1 = \frac{5}{2}$ αλληλεπιδρούν σύμφωνα με την Χαμιλτονιανή

$$H = A\, \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

όπου A μια δεδομένη σταθερά. Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος καθώς και τον βαθμό εκφυλισμού της κάθε μίας.

Πρόβλημα 8.6 : Δύο στροφορμές $\vec{\ell}$ και $\vec{s}$, όχι κατ΄ ανάγκη τροχιακή και σπίν αντίστοιχα, αλληλεπιδρούν μέσω της Χαμιλτονιανής $H = A\ \vec{\ell} \cdot \vec{s}$, όπου A μια δεδομένη σταθερά.

(α) Ποιά είναι και ποιά δεν είναι διατηρήσιμα μεγέθη του συστήματος;

(β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος για δεδομένα ℓ και s.

(γ) Γράψτε τις εξισώσεις χρονικής μεταβολής των μέσων τιμών $\langle\vec{\ell}\rangle$ και $\langle\vec{s}\rangle$ και συμπεράνετε πώς κινούνται τα διανύσματα $\langle\vec{\ell}\rangle$ και $\langle\vec{s}\rangle$ στον χώρο.

Πρόβλημα 8.7 :Δείξατε ότι η γενική μήτρα στροφής για σωματίδια με $s = 1$ δίνεται από την σχέση

$$U(\hat{n}, \phi) = e^{-i\phi\ s_n} = 1 - i \sin\phi\ s_n + (\cos\phi - 1) s_n^2 \ \ , \ \ s_n \equiv \hat{n} \cdot \vec{s}$$

όπου $\hat{n}$ ($\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$) η κατεύθυνση του άξονα στροφής και ϕ η γωνία στροφής. Χρησιμοποιήστε κατάλληλα αυτήν την εξίσωση για να κατασκευάσετε τα ιδιοδιανύσματα του σπίν κατά τις κατευθύνσεις x και y.

Πρόβλημα 8.8 (Δύσκολο) : Οι γωνίες του Euler. Μια τυχαία στροφή στις τρείς διαστάσεις μπορεί να παραμετριστεί από 3 γωνίες α,β,γ, γνωστές σαν γωνίες του Euler. Ο γενικός τελεστής μιας τυχαίας στροφής με αυτή την παραμέτριση είναι

$$U(\alpha, \beta, \gamma) \equiv e^{-i\alpha L_z}\ e^{-i\beta L_y}\ e^{-i\gamma L_z}$$

όπου $L_{x,y,z}$ είναι οι αντίστοιχες συνιστώσες της στροφορμής.

(α) Δείξτε ότι ο U περιγράφει διαδοχικά μια στροφή κατά γωνία γ γύρω από τον άξονα των z, μια στροφή κατά γωνία β γύρω από τον άξονα των y και μια στροφή κατα γωνία α γύρω από τον άξονα των z.

(β) Τα στοιχεία πίνακα του μοναδιαίου τελεστή U, στην γνωστή ορθοκανονική βάση $|\ell, m\rangle$, δίνονται από την σχέση

$$D^{\ell}_{m,m'}(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \langle \ell, m | U(\alpha, \beta, \gamma) | \ell, m' \rangle = e^{i\alpha m} d^{(\ell)}_{mm'}(\beta) e^{-i\gamma m'}$$

όπου

$$d^{(\ell)}_{mm'}(\beta) = \langle \ell, m | U e^{-i\beta L_y} | \ell, m' \rangle \ \ .$$

Δείξτε την παραπάνω σχέση.

(γ) Οι συντελεστές $d^{(\ell)}_{mm'}(\beta)$, δίνονται από τον τύπο του Wigner

$$d^{(\ell)}_{mm'}(\beta) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!(\ell-m)!}{(\ell+m')!(\ell-m')!}} \sum_n \begin{pmatrix} \ell+m' \\ \ell-m-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell-m' \\ n \end{pmatrix} (-1)^{\ell-m'-n} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2n+m+m'} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2\ell-2n-m-}$$

. Για να αποδείξουμε τον τύπο του Wigner, θα κάνουμε την παρακάτω κατασκευή χρησιμοποιώντας δύο σπινοριακές μεταβλητές, x_+, x_-, έτσι ώστε το άνυσμα $\binom{x_+}{x_-}$ να μετασχηματίζεται σαν σπίνορας με σπιν 1/2.

(δ) Δείξτε ότι οι τελεστές

$$J_x = \frac{1}{2}\left(x_- \frac{\partial}{\partial x_+} + x_+ \frac{\partial}{\partial x_-}\right) \ \ , \ \ J_y = \frac{i}{2}\left(x_- \frac{\partial}{\partial x_+} - x_+ \frac{\partial}{\partial x_-}\right) \ \ , \ \ J_z = \frac{1}{2}\left(x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} - x_- \frac{\partial}{\partial x_-}\right)$$

ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης της στροφορμής

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \ \ .$$

(ε) Δείξτε ότι

$$J_\pm = x_\pm \frac{\partial}{\partial x_\mp} \ \ , \ \ \vec{J}^2 = k(k+1) \ \ , \ \ k \equiv \frac{1}{2}\left(x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} + x_- \frac{\partial}{\partial x_-}\right)$$

(ζ) Δείξτε ότι η δράση των J_i σε μονώνυμα $x_+^a x_-^b$, διατηρεί αναλλοίωτο το άθροισμα των εκθετών $a+b$. Συμπεράνατε ότι τα μονώνυμα $x_+^{\ell+m} x_-^{\ell-m}$, με $m = \ell, \ell-1, \cdot, -\ell+1, -\ell$, αποτελούν μια βάση που ισοδυναμεί στα ανύσματα $|\ell, m\rangle$. Δείξτε ότι για να ισχύει η σχέση

$$J_\pm u_{\ell,m} = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)}\, u_{\ell,m\pm 1}$$

τα μονώνυμα πρέπει να κανονικοποιηθούν ώς

$$u_{\ell,m} = \frac{x_+^{\ell+m} x_-^{\ell-m}}{\sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!}}$$

(η) Κάνετε τώρα μία στροφή με γωνίες α=γ=0, β. Δείξατε ότι ο σπίνορας μετασχηματίζεται ως εξής

$$x'_+ = x_+ \cos\frac{\beta}{2} + x_- \sin\frac{\beta}{2} \ \ , \ \ x'_+ = -x_+ \sin\frac{\beta}{2} + \xi_- \cos\frac{\beta}{2}$$

(ϑ) Συμπεράνατε ότι τα μονώνυμα της βάσης $u_{\ell,m}$, θα μετασχηματιστούν κάτω από αυτήν την στροφή ως

$$u'_{\ell,m} = \frac{(x'_+)^{\ell+m} (x'_-)^{\ell-m}}{\sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!}}$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι

$$u'_{\ell,m'} = U(0,\beta,0) u_{\ell,m} = \sum_m U(0,\beta,0)_{mm'} u_{\ell,m} = \sum_m d^{(\ell)}_{mm'}(\beta) \frac{x_+^{\ell+m} x_-^{\ell-m}}{\sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!}}$$

Δείξτε ότι αυτή η σχέση οδηγεί στον τύπο του Wigner .

Σημειώματα

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης