ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

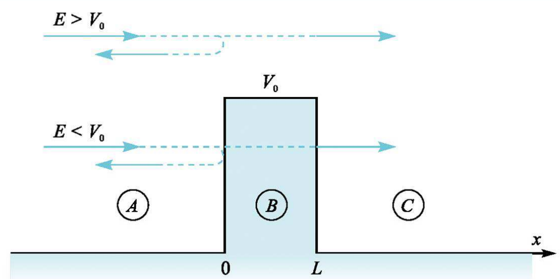
Τμήμα Φυσικής

Κβαντική Μηχανική Ι.

Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

Πρόχειρο διαγώνισμα

10 Νοεμβρίου 2014



ΣΧΗΜΑ 3.10: *Σκέδαση σε ένα ορθογώνιο φράγμα δυναμικού.* Ένα σωματίδιο έχει πεπερασμένη πιθανότητα να ανακλαστεί όταν η ενέργειά του του επιτρέπει να διαβεί την περιοχή του φράγματος ($E > V_0$) και πεπερασμένη πιθανότητα να το διαβεί όταν η ενέργειά του του το απαγορεύει ($E < V_0$).

Πρόβλημα 1 : Δίνεται το δυναμικό στην παραπάνω εικόνα. Για $E < V_0$, βρείτε τους συντελεστές διάδοσης T και ανάκλασης R, για δέσμη σωματιδίων που έρχεται από αριστερά. Επιβεβαιώστε ότι $R + T = 1$.

Λύση: θα γράψουμε την εξίσωση ιδιοτιμών της ενέργειας ξεχωριστά στις τρείς περιοχές του σχήματος 3.10.

$$\begin{cases} \psi_A'' + k^2 \psi_A = 0, & x < 0, \\ \psi_B'' - k'^2 \psi_B = 0, & 0 < x < L \\ \psi_C'' + k^2 \psi_C = 0, & x > L \end{cases} \tag{1}$$

όπου έχουμε ορίσει για ευκολία

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \ , \ k'^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \tag{2}$$

Η γενική λύση είναι

$$\psi(x) = \begin{cases} C_1\ e^{ikx} + C_2\ e^{-ikx}, & x < 0, \\ \\ C_3\ e^{-k'x} + C_4\ e^{k'x}, & 0 < x < L \\ \\ C_5\ e^{ikx}, & x > L \end{cases} \tag{3}$$

όπου στην περιοχή C, μηδενίσαμε τον όρο $\sim e^{-ikx}$, που θα περιέγραφε σωμάτια που έρχονται από δεξιά, όπως απαιτεί το πρόβλημά μας. Το ρεύμα πιθανότητας στην μονοδιάστατη περίπτωση είναι

$$j = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi^*\psi' - \psi(\psi^*)'\right] \tag{4}$$

Για ένα ελεύθερο κύμα $\psi = C\ e^{ikx}$, η (4) δίνει

$$j = \frac{\hbar k}{m}|C|^2 \tag{5}$$

Χρησιμοποιώντας την (5) μπορούμε να γράψουμε

$$j_{in} = \frac{\hbar k}{m}|C_1|^2 \ \ ,\ \ j_{ref} = \frac{\hbar k}{m}|C_2|^2 \ \ ,\ \ j_{trans} = \frac{\hbar k}{m}|C_5|^2 \tag{6}$$

για τα ρεύματα πιθανότητας, j_{in} (εισερχόμενο), j_{ref} (ανακλώμενο), j_{trans} (μεταδιδόμενο στα δεξιά). Αρα ο συντελεστής ανάκλασης R και διέλευσης T, δίνονται από τις σχέσεις

$$R = \frac{j_{ref}}{j_{in}} = \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2} \ \ ,\ \ T = \frac{j_{trans}}{j_{in}} = \frac{|C_5|^2}{|C_1|^2} \ \ , \tag{7}$$

Αυτό που μας μένει είναι να απαιτήσουμε η κυμματοσυνάρτηση και η παράγωγός της να είναι συνεχής παντού, και πιο συγκεκριμένα στα σημεία $x = 0$ και $x = L$. Στο $x = 0$ αυτά συνεπάγεται

$$\psi_A(0) = \psi_B(0) \ \ ,\ \ \psi_A'(0) = \psi_B'(0) \tag{8}$$

που μεταφράζεται από την (3) σε

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4 \ \ ,\ \ ik(C_1 - C_2) = k'(-C_3 + C_4) \tag{9}$$

Μπορούμε να λύσουμε ως προς C_3, C_4

$$C_3 = \frac{1}{2}\left[\left(1 - i\frac{k}{k'}\right)C_1 + \left(1 + i\frac{k}{k'}\right)C_2\right] \ \ ,\ \ C_4 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + i\frac{k}{k'}\right)C_1 + \left(1 - i\frac{k}{k'}\right)C_2\right] \tag{10}$$

Στο $x = L$ η συνέχεια είναι

$$\psi_B(L) = \psi_C(L) \ \ ,\ \ \psi_B'(L) = \psi_C'(L) \tag{11}$$

και συνεπάγεται

$$C_5\ e^{ikL} = C_3\ e^{-k'L} + C_4\ e^{k'L} \ \ ,\ \ ikC_5\ e^{ikL} = k'(-C_3\ e^{-k'L} + C_4\ e^{k'L}) \tag{12}$$

Λύνοντας ως προς C_3, C_4 παίρνουμε

$$C_3 = \frac{1}{2}\left(1 - i\frac{k}{k'}\right) C_5\ e^{(ik+k')L} \ \ ,\ \ C_4 = \frac{1}{2}\left(1 + i\frac{k}{k'}\right) C_5\ e^{(ik-k')L} \tag{13}$$

Από τις εξισώσεις (10) και (13) μπορούμε να απαλείψουμε τα C_3, C_4 ώστε να πάρουμε δύο σχέσεις που συνδέουν τους τρείς παραμένοντες αγνώστους C_1, C_2, C_5.

$$\left(1 - i\frac{k}{k'}\right) C_5\ e^{(ik+k')L} = \left(1 - i\frac{k}{k'}\right) C_1 + \left(1 + i\frac{k}{k'}\right) C_2 \tag{14}$$

$$\left(1 + i\frac{k}{k'}\right) C_5\ e^{(ik-k')L} = \left(1 + i\frac{k}{k'}\right) C_1 + \left(1 - i\frac{k}{k'}\right) C_2 \tag{15}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (14) και (15) παίρνουμε

$$\frac{k' - ik}{k' + ik} e^{2k'L} = \frac{(k' - ik)\, C_1 + (k' + ik)\, C_2}{(k' + ik)\, C_1 + (k' - ik)\, C_2} \tag{16}$$

Ορίζοντας την καινούργια (και χρήσιμη) μεταβλητή θ (που είναι φάση) η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\theta e^{2k'L} = \frac{\theta\ C_1 + C_2}{C_1 + \theta\ C_2} \ \ ,\ \ \theta = \frac{k' - ik}{k' + ik} \ \ ,\ \ |\theta|^2 = 1 \tag{17}$$

Λύνοντας ως προς C_2 βρίσκουμε

$$C_2 = \frac{\theta(e^{2k'L} - 1)}{1 - \theta^2 e^{2k'L}} C_1 \tag{18}$$

Ο συντελεστής C_2 μπορεί να γραφτεί και σε άλλες μορφές αντικαθιστώντας την τιμή του θ από την (17)

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{(k'^2 + k^2)(e^{2k'L} - 1)}{(k' + ik)^2 - (k' - ik)^2 e^{2k'L}} = \frac{(k'^2 + k^2)(e^{2k'L} - 1)}{(k'^2 - k^2)(1 - e^{2k'L}) + 2ikk'(1 + e^{2k'L})} = \tag{19}$$

$$= \frac{(k'^2 + k^2)(e^{k'L} - e^{-k'L})}{(k'^2 - k^2)(e^{-k'L} - e^{k'L}) + 2ikk'(e^{k'L} + e^{k'L})} = \frac{(k'^2 + k^2)\sinh(k'L)}{-(k'^2 - k^2)\sinh(k'L) + 2ikk'\cosh(k'L)} =$$

$$= -\frac{(k'^2 + k^2)}{(k'^2 - k^2) - 2ikk'\coth(k'L)}$$

Μπορούμε τώρα από την (18) να υπολογίσουμε τον συντελεστή ανάκλασης

$$R = \left|\frac{C_2}{C_1}\right|^2 = \left|\frac{\theta(e^{2k'L} - 1)}{1 - \theta^2 e^{2k'L}}\right|^2 = \frac{(e^{2k'L} - 1)^2}{(1 - \theta^2 e^{2k'L})(1 - (\theta^*)^2 e^{2k'L})} \tag{20}$$

Από την εξίσωση (15) μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το C_5 αντικαθιστώντας την τιμή του C_2 που βρήκαμε στην (18)

$$C_5 = e^{(-ik+k')L}(C_1 + \theta\ C_2) = e^{(-ik+k')L}\left(C_1 + \theta\frac{\theta(e^{2k'L} - 1)}{1 - \theta^2 e^{2k'L}} C_1\right) = \tag{21}$$

$$= e^{(-ik+k')L}\left(1+\frac{\theta^2(e^{2k'L}-1)}{1-\theta^2 e^{2k'L}}\right)C_1 = \frac{(1-\theta^2)e^{(-ik+k')L}}{(1-\theta^2 e^{2k'L})}C_1$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή διέλευσης

$$T = \left|\frac{C_5}{C_1}\right|^2 = \frac{|1-\theta^2|^2}{|1-\theta^2 e^{2k'L}|^2}e^{2k'L} \tag{22}$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε με ένα απλό υπολογισμό από τις (20) και (22) ότι

$$R + T = 1 \tag{23}$$

Επίλογος. Μια και έχουμε τις λύσεις μπορούμε να πάρουμε το όριο του $L \to \infty$, ώστε να βρούμε τα αποτελέσματα για το βήμα δυναμικού που λύσαμε σε μια από τις διαλέξεις. Ο μόνος παράγοντας στις (20), (22) που εξαρτάται από το L είναι ο $e^{2k'L}$, οπότε

$$\lim_{L\to\infty} R = \frac{1}{|\theta|^4} = 1 \ , \ \lim_{L\to\infty} T = 0 \tag{24}$$

Το αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτό του βήματος δυναμικού.

Ένα άλλο ενδιαφέρον όριο είναι το $E \to V_0$. Σε αυτήν την περίπτωση από την (2) βρίσκουμε ότι $k' \to 0$.

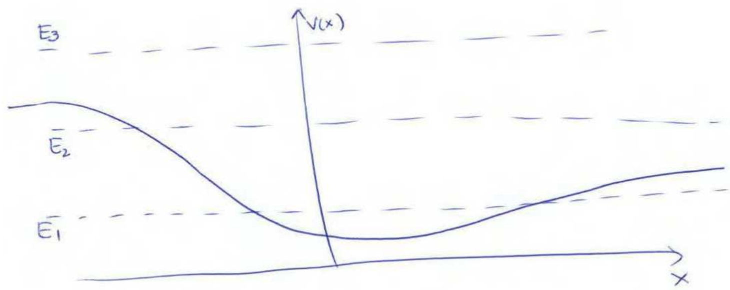
$$\lim_{k'\to 0} \theta = -1 \ , \ \lim_{k'\to 0} R = 0 \ , \ \lim_{L\to\infty} T = 1 \tag{25}$$

Πρόβλημα 2: Δίνεται το δυναμικό στην παρακάτω εικόνα. Για τις τρείς ενέργειες, πού είναι σημειωμένες στο σχήμα, οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις αντιστοιχούν σε δέσμιες ή ελεύθερες καταστάσεις. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Λύση: (α) Για την ενέργεια E_1 παρατηρούμε ότι είναι μικρότερη από την τιμή του δυναμικού και για $x \to +\infty$ και για $x \to -\infty$. Η κυμματοσυνάρτηση λοιπόν είναι εκθετικά μικρή και $x \to +\infty$ για και για $x \to -\infty$. Άρα αυτή η ιδιοκατάσταση είναι δέσμια, και ανήκει στο διακριτό φάσμα της χαμιλτονιανής.

(β) Για την ενέργεια E_2 παρατηρούμε ότι είναι μικρότερη από την τιμή του δυναμικού και για $x \to -\infty$ αλλά μεγαλύτερη από το δυναμικό για $x \to +\infty$. Η κυμματοσυνάρτηση λοιπόν είναι εκθετικά μικρή και $x \to -\infty$ αλλά είναι σαν ελεύθερο κύμα για $x \to +\infty$. Άρα αυτή η ιδιοκατάσταση είναι μη δέσμια, και ανήκει στο συνεχές φάσμα της χαμιλτονιανής.

(γ)Για την ενέργεια E_3 παρατηρούμε ότι είναι μεγαλύτερη από το δυναμικό για $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$. Η κυμματοσυνάρτηση λοιπόν είναι σαν ελεύθερο κύμα για $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$. Άρα αυτή η ιδιοκατάσταση είναι μη δέσμια, και ανήκει στο συνεχές φάσμα της χαμιλτονιανής.



E3
V(x)
E2
E1
x

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης