



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

---

## Κβαντομηχανική Ι

Η. Κυρίτσης

Τμήμα Φυσικής

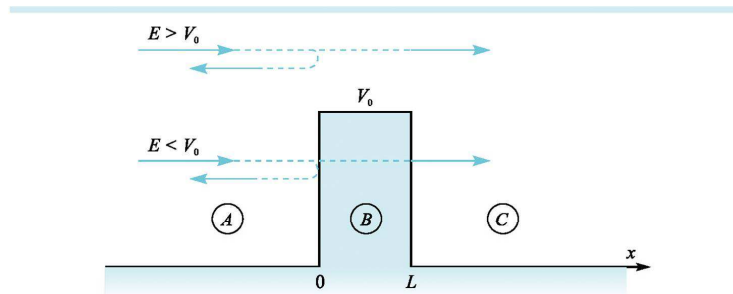
---

# Κβαντική Μηχανική Ι.

## Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

### Πρόχειρο διαγώνισμα

10 Νοεμβρίου 2014



**ΣΧΗΜΑ 3.10:** Σκέδαση σε ένα ορθογώνιο φράγμα δυναμικού. Ένα σωματίδιο έχει πεπερασμένη πιθανότητα να ανακλαστεί όταν η ενέργειά του του επιτρέπει να διαβεί την περιοχή του φράγματος ( $E > V_0$ ) και πεπερασμένη πιθανότητα να το διαβεί όταν η ενέργειά του του το απαγορεύει ( $E < V_0$ ).

**Πρόβλημα 1 :** Δίνεται το δυναμικό στην παραπάνω εικόνα. Για  $E < V_0$ , βρείτε τους συντελεστές διάδοσης  $T$  και ανάκλασης  $R$ , για δέσμη σωματιδίων που έρχεται από αριστερά. Επιβεβαιώστε ότι  $R + T = 1$ .

**Λύση:** Θα γράψουμε την εξίσωση ιδιοτιμών της ενέργειας ξεχωριστά στις τρεις περιοχές του σχήματος 3.10.

$$\begin{cases} \psi''_A + k^2\psi_A = 0, & x < 0, \\ \psi''_B - k'^2\psi_B = 0, & 0 < x < L \\ \psi''_C + k^2\psi_C = 0, & x > L \end{cases} \quad (1)$$

όπου έχουμε ορίσει για ευκολία

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad k'^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad (2)$$

Η γενική λύση είναι

$$\psi(x) = \begin{cases} C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}, & x < 0, \\ C_3 e^{-k'x} + C_4 e^{k'x}, & 0 < x < L \\ C_5 e^{ikx}, & x > L \end{cases} \quad (3)$$

όπου στην περιοχή  $C$ , μηδενίσαμε τον όρο  $\sim e^{-ikx}$ , που θα περιέγραφε σωμάτια που έρχονται από δεξιά, όπως απαιτεί το πρόβλημά μας. Το ρεύμα πιθανότητας στην μονοδιάστατη περίπτωση είναι

$$j = \frac{\hbar}{2im} [\psi^* \psi' - \psi (\psi^*)'] \quad (4)$$

Για ένα ελεύθερο κύμα  $\psi = C e^{ikx}$ , η (4) δίνει

$$j = \frac{\hbar k}{m} |C|^2 \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας την (5) μπορούμε να γράψουμε

$$j_{in} = \frac{\hbar k}{m} |C_1|^2, \quad j_{ref} = \frac{\hbar k}{m} |C_2|^2, \quad j_{trans} = \frac{\hbar k}{m} |C_5|^2 \quad (6)$$

για τα ρεύματα πιθανότητας,  $j_{in}$  (εισερχόμενο),  $j_{ref}$  (ανακλώμενο),  $j_{trans}$  (μεταδιδόμενο στα δεξιά). Αρα ο συντελεστής ανάκλασης  $R$  και διέλευσης  $T$ , δίνονται από τις σχέσεις

$$R = \frac{j_{ref}}{j_{in}} = \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2}, \quad T = \frac{j_{trans}}{j_{in}} = \frac{|C_5|^2}{|C_1|^2}, \quad (7)$$

Αυτό που μας μένει είναι να απαιτήσουμε η κυματοσυνάρτηση και η παράγωγός της να είναι συνεχής παντού, και πιο συγκεκριμένα στα σημεία  $x = 0$  και  $x = L$ . Στο  $x = 0$  αυτά συνεπάγεται

$$\psi_A(0) = \psi_B(0), \quad \psi'_A(0) = \psi'_B(0) \quad (8)$$

που μεταφράζεται από την (3) σε

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4, \quad ik(C_1 - C_2) = k'(-C_3 + C_4) \quad (9)$$

Μπορούμε να λύσουμε ως προς  $C_3, C_4$

$$C_3 = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - i \frac{k}{k'}\right) C_1 + \left(1 + i \frac{k}{k'}\right) C_2 \right], \quad C_4 = \frac{1}{2} \left[ \left(1 + i \frac{k}{k'}\right) C_1 + \left(1 - i \frac{k}{k'}\right) C_2 \right] \quad (10)$$

Στο  $x = L$  η συνέχεια είναι

$$\psi_B(L) = \psi_C(L), \quad \psi'_B(L) = \psi'_C(L) \quad (11)$$

και συνεπάγεται

$$C_5 e^{ikL} = C_3 e^{-k'L} + C_4 e^{k'L}, \quad ikC_5 e^{ikL} = k'(-C_3 e^{-k'L} + C_4 e^{k'L}) \quad (12)$$

Λύνοντας ως προς  $C_3, C_4$  παίρνουμε

$$C_3 = \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{k}{k'}\right) C_5 e^{(ik+k')L}, \quad C_4 = \frac{1}{2} \left(1 + i \frac{k}{k'}\right) C_5 e^{(ik-k')L} \quad (13)$$

Από τις εξισώσεις (10) και (13) μπορούμε να απαλείψουμε τα  $C_3, C_4$  ώστε να πάρουμε δύο σχέσεις που συνδέουν τους τρεις παραμένοντες αγνώστους  $C_1, C_2, C_5$ .

$$\left(1 - i \frac{k}{k'}\right) C_5 e^{(ik+k')L} = \left(1 - i \frac{k}{k'}\right) C_1 + \left(1 + i \frac{k}{k'}\right) C_2 \quad (14)$$

$$\left(1 + i \frac{k}{k'}\right) C_5 e^{(ik-k')L} = \left(1 + i \frac{k}{k'}\right) C_1 + \left(1 - i \frac{k}{k'}\right) C_2 \quad (15)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (14) και (15) παίρνουμε

$$\frac{k' - ik}{k' + ik} e^{2k'L} = \frac{(k' - ik) C_1 + (k' + ik) C_2}{(k' + ik) C_1 + (k' - ik) C_2} \quad (16)$$

Ορίζοντας την καινούργια (και χρήσιμη) μεταβλητή  $\theta$  (που είναι φάση) η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\theta e^{2k'L} = \frac{\theta C_1 + C_2}{C_1 + \theta C_2}, \quad \theta = \frac{k' - ik}{k' + ik}, \quad |\theta|^2 = 1 \quad (17)$$

Λύνοντας ως προς  $C_2$  βρίσκουμε

$$C_2 = \frac{\theta(e^{2k'L} - 1)}{1 - \theta^2 e^{2k'L}} C_1 \quad (18)$$

Ο συντελεστής  $C_2$  μπορεί να γραφτεί και σε άλλες μορφές αντικαθιστώντας την τιμή του  $\theta$  από την (17)

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{C_1} &= \frac{(k'^2 + k^2)(e^{2k'L} - 1)}{(k' + ik)^2 - (k' - ik)^2 e^{2k'L}} = \frac{(k'^2 + k^2)(e^{2k'L} - 1)}{(k'^2 - k^2)(1 - e^{2k'L}) + 2ikk'(1 + e^{2k'L})} = \\ &= \frac{(k'^2 + k^2)(e^{k'L} - e^{-k'L})}{(k'^2 - k^2)(e^{-k'L} - e^{k'L}) + 2ikk'(e^{k'L} + e^{-k'L})} = \frac{(k'^2 + k^2) \sinh(k'L)}{-(k'^2 - k^2) \sinh(k'L) + 2ikk' \cosh(k'L)} = \\ &= -\frac{(k'^2 + k^2)}{(k'^2 - k^2) - 2ikk' \coth(k'L)} \end{aligned} \quad (19)$$

Μπορούμε τώρα από την (18) να υπολογίσουμε τον συντελεστή ανάκλασης

$$R = \left| \frac{C_2}{C_1} \right|^2 = \left| \frac{\theta(e^{2k'L} - 1)}{1 - \theta^2 e^{2k'L}} \right|^2 = \frac{(e^{2k'L} - 1)^2}{(1 - \theta^2 e^{2k'L})(1 - (\theta^*)^2 e^{2k'L})} \quad (20)$$

Από την εξίσωση (15) μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το  $C_5$  αντικαθιστώντας την τιμή του  $C_2$  που βρήκαμε στην (18)

$$C_5 = e^{(-ik+k')L} (C_1 + \theta C_2) = e^{(-ik+k')L} \left( C_1 + \theta \frac{\theta(e^{2k'L} - 1)}{1 - \theta^2 e^{2k'L}} C_1 \right) = \quad (21)$$

$$= e^{(-ik+k')L} \left( 1 + \frac{\theta^2(e^{2k'L} - 1)}{1 - \theta^2 e^{2k'L}} \right) C_1 = \frac{(1 - \theta^2)e^{(-ik+k')L}}{(1 - \theta^2 e^{2k'L})} C_1$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή διέλευσης

$$T = \left| \frac{C_5}{C_1} \right|^2 = \frac{|1 - \theta^2|^2}{|1 - \theta^2 e^{2k'L}|^2} e^{2k'L} \quad (22)$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε με ένα απλό υπολογισμό από τις (20) και (22) ότι

$$R + T = 1 \quad (23)$$

**Επίλογος.** Μια και έχουμε τις λύσεις μπορούμε να πάρουμε το όριο του  $L \rightarrow \infty$ , ώστε να βρούμε τα αποτελέσματα για το βήμα δυναμικού που λύσαμε σε μια από τις διαλέξεις. Ο μόνος παράγοντας στις (20), (22) που εξαρτάται από το  $L$  είναι ο  $e^{2k'L}$ , οπότε

$$\lim_{L \rightarrow \infty} R = \frac{1}{|\theta|^4} = 1, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} T = 0 \quad (24)$$

Το αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτό του βήματος δυναμικού.

Ένα άλλο ενδιαφέρον όριο είναι το  $E \rightarrow V_0$ . Σε αυτήν την περίπτωση από την (2) βρίσκουμε ότι  $k' \rightarrow 0$ .

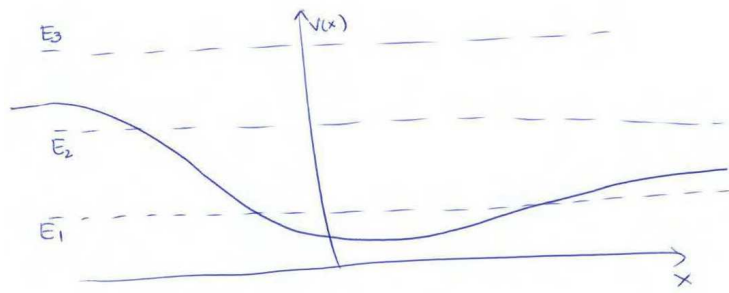
$$\lim_{k' \rightarrow 0} \theta = -1, \quad \lim_{k' \rightarrow 0} R = 0, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} T = 1 \quad (25)$$

**Πρόβλημα 2:** Δίνεται το δυναμικό στην παρακάτω εικόνα. Για τις τρεις ενέργειες, πού είναι σημειωμένες στο σχήμα, οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις αντιστοιχούν σε δέσμιες ή ελεύθερες καταστάσεις. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

**Λύση:** (α) Για την ενέργεια  $E_1$  παρατηρούμε ότι είναι μικρότερη από την τιμή του δυναμικού και για  $x \rightarrow +\infty$  και για  $x \rightarrow -\infty$ . Η κυματοσυνάρτηση λοιπόν είναι εκθετικά μικρή και  $x \rightarrow +\infty$  και για  $x \rightarrow -\infty$ . Άρα αυτή η ιδιοκατάσταση είναι δέσμια, και ανήκει στο διακριτό φάσμα της χαμιλτονιανής.

(β) Για την ενέργεια  $E_2$  παρατηρούμε ότι είναι μικρότερη από την τιμή του δυναμικού και για  $x \rightarrow -\infty$  αλλά μεγαλύτερη από το δυναμικό για  $x \rightarrow +\infty$ . Η κυματοσυνάρτηση λοιπόν είναι εκθετικά μικρή και  $x \rightarrow -\infty$  αλλά είναι σαν ελεύθερο κύμα για  $x \rightarrow +\infty$ . Άρα αυτή η ιδιοκατάσταση είναι μη δέσμια, και ανήκει στο συνεχές φάσμα της χαμιλτονιανής.

(γ) Για την ενέργεια  $E_3$  παρατηρούμε ότι είναι μεγαλύτερη από το δυναμικό για  $x \rightarrow +\infty$  και  $x \rightarrow -\infty$ . Η κυματοσυνάρτηση λοιπόν είναι σαν ελεύθερο κύμα για  $x \rightarrow +\infty$  και  $x \rightarrow -\infty$ . Άρα αυτή η ιδιοκατάσταση είναι μη δέσμια, και ανήκει στο συνεχές φάσμα της χαμιλτονιανής.



# Σημειώματα

## Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Η. Κυρίτσης 2014. «Κβαντομηχανική Ι». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

