ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 11

Μικτό γινόμενο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Όγκος παραλληλεπιπέδου

Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, και εξετάζουμε το εσωτερικό γινόμενο του εξωτερικού γινομένου των $\vec{x}$, $\vec{y}$ με το διάνυσμα z, $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$.

Αυτό είναι ένας αριθμός του οποίου η απόλυτη τιμή είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Εάν η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα, τότε ο αριθμός $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ είναι θετικός, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητικός.

Παρατηρούμε οτι το γινόμενο $(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$ έχει απόλυτη τιμή ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{x}$, και πρόσημο ίδιο με το $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$.

Συμπεραίνουμε οτι

$$(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} \,.$$

Μικτό γινόμενο

Ορίζουμε το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής,

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}\,.$$

Εάν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Το μικτό γινόμενο είναι θετικό εάν το σύστημα $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο και αρνητικό εάν το $(-\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο.

Εάν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι συνεπίπεδα, το μικτό γινόμενο είναι μηδέν.

Πρόταση

Το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής, ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\begin{aligned}
[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] &= [\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}] \\
&= -[\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}] \\
(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} &= \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) \,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Επιμεριστική ιδιότητα για εξωτερικό γινόμενο

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την επιμεριστική ιδιότητα για το εξωτερικό γινόμενο:
Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\vec{b} = \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) - \vec{x} \times \vec{y} - \vec{x} \times \vec{z}\,.$$

Θα δείξουμε οτι $|\vec{b}| = 0$, και συνεπώς οτι $\vec{b} = 0$.

Συμπεραίνουμε οτι

$$\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}\,.$$

Υπολογισμός του μικτού γινομένου

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μικτό γινόμενο χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς,

$$
\begin{aligned}
\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) &= (x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})\cdot \\
&\quad \cdot\left[(y_2z_3-y_3z_2)\vec{i}+(y_3z_1-y_1z_3)\vec{j}+(y_1z_2-y_2z_1)\vec{k}\right] \\
&= x_1y_2z_3-x_1y_3z_2+x_2y_3z_1-x_2y_1z_3+x_3y_1z_2-x_3y_2z_1 \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Δις εξωτερικό γινόμενο

Το γινόμενο $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ είναι κάθετο προς το $\vec{y} \times \vec{z}$, και συνεπώς βρίσκεται στο επίπεδο των $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Μπορούμε να εκφράσουμε το $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{y}$ και $\vec{z}$.

Πρόταση

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$$

και

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}\,.$$

Ελεύθερα διανύσματα στο χώρο

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση του επιπέδου, εάν $\vec{u}$ είναι ένα διάνυσμα στο χώρο ορίζουμε το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{u}]$ να είναι το σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων στο χώρο, τα οποία προκύπτουν με παράλληλη μεταφορά του $\vec{u}$ σε κάθε σημείο του χώρου.

$$[\vec{u}] = \{\vec{v} \text{ διάνυσμα στο χώρο, τέτοιο ώστε } \vec{v} \sim \vec{u}\}\,.$$

Η παράλληλη μεταφορά είναι συμβατή με τις πράξεις διανυσμάτων στο χώρο που έχουμε περιγράψει: πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό, προβολή διανύσματος σε διάνυσμα, εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες πράξεις μεταξύ ελευθέρων διανυσμάτων.

Για παράδειγμα, εάν $\vec{OC} = \vec{OA} \times \vec{OB}$, ορίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των ελεύθερων διανυσμάτων $[\vec{OA}]$ και $[\vec{OB}]$

$$
\begin{aligned}
[\vec{OA}] \times [\vec{OB}] &= [\vec{OA} \times \vec{OB}] \\
&= [\vec{OC}] .
\end{aligned}
$$

Εάν $\vec{u} \sim \vec{OA}$, $\vec{v} \sim \vec{OB}$ και $\vec{w} \sim \vec{OC}$, τότε

$$[\vec{u}] \times [\vec{v}] = [\vec{w}] .$$