ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 37

Η δράση του πίνακα A

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκ 2014

Ο περιορισμός της απεικόνισης στο χώρο γραμμών

Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την περιγραφή της γραμμικής απεικόνισης T_A που πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ με τον $m \times n$ πίνακα A.

Εάν $x \in \mathcal{N}(A)$, τότε $T_A(x) = 0$.

Εάν το x είναι ορθογώνιο στο μηδενοχώρο, τότε $x \in \mathcal{R}(A^T)$, και $T_A(x) \in \mathcal{R}(A)$.

Δηλαδή ο περιορισμός της T_A στο χώρο γραμμών του A ορίζει μία απεικόνιση

$$T_A : \mathcal{R}(A^T) \longrightarrow \mathcal{R}(A).$$

Το σημαντικό είναι οτι αυτή η απεικόνιση από το χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ στο χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πρόταση

Για κάθε διάνυσμα $y \in \mathcal{R}(A)$, υπάρχει ένα, και μόνον ένα, διάνυσμα $x \in \mathcal{R}(A^T)$, τέτοιο ώστε $Ax = y$.

Η δράση ενός πίνακα

Ανακεφαλαιώνουμε την περιγραφή της δράσης του πολλαπλασιασμού με ένα πίνακα.

Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας τάξεως r, και $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ η γραμμική απεικόνιση $x \mapsto Ax$, τότε

1. Ο χώρος γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, διάστασης r.
2. Ο χώρος στηλών $\mathcal{R}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, διάστασης r.
3. Ο μηδενοχώρος $\mathcal{N}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n - r$.
4. Ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ διάστασης $m - r$.

5. Ο μηδενοχώρος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^{\perp}$.
6. Ο αριστερός μηδενοχώρος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στηλών, $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$.
7. Η γραμμική απεικόνιση T_A απεικονίζει το διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A^T)$ του $\mathbb{R}^n$ αμφιμονοσήμαντα στο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A)$ του $\mathbb{R}^m$.
8. Η γραμμική απεικόνιση T_{A^T} απεικονίζει το διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A)$ του $\mathbb{R}^m$ αμφιμονοσήμαντα στο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A^T)$ του $\mathbb{R}^n$.

Προσέξτε οτι οι δύο προηγούμενες αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις δεν είναι υποχρεωτικά αντίστροφες η μία της άλλης.

Ο μηδενόχωρος του $A^T A$

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο Λήμμα, το οποίο είχαμε χρησιμοποιήσει στον υπολογισμό των μονόπλευρων αντιστρόφων πινάκων μέγιστης τάξης.

Λήμμα

Ο πίνακας $A^T A$ έχει τον ίδιο μηδενοχώρο με τον A.