MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 42

Υπολογισμός της ορίζουσας

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκ 2014

Υπολογισμός με απαλοιφή

Κάθε μη ιδιόμορφος $n \times n$ πίνακας παραγοντοποιείται στη μορφή

$$A = P^{-1} L D U' ,$$

όπου

- P είναι πίνακας μετάθεσης, με $\det P = \pm 1$
- L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο, $\det L = 1$
- D είναι διαγώνιος πίνακας με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και $\det D$ ισούται με το γινόμενο των οδηγών,
- U' είναι άνω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο, με $\det U' = 1$.

Άρα

$$\begin{aligned} \det A &= \det P^{-1} \det L \det D \det U' \\ &= \pm \,(\text{γινόμενο των οδηγών}) \,. \end{aligned}$$

Ο τύπος για την ορίζουσα 2×2 πινάκων

Από θεωρητική άποψη θα θέλαμε να γνωρίζουμε τον τρόπο εξάρτησης της ορίζουσας από κάθε στοιχείο του πίνακα, δηλαδή να έχουμε έναν **τύπο για την ορίζουσα**.

Ας δούμε πώς προκύπτει ο τύπος για ορίζουσες 2×2 πινάκων απο τις ιδιότητες της ορίζουσας.

Η πρώτη γραμμή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$[a\, b] = [a\, 0] + [0\, b] \ .$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \\
&= 0 + ad + (-bc) + 0\,.
\end{aligned}
$$

Η ανάλυση της ορίζουσας $n \times n$ πίνακα

Για έναν $n \times n$ πίνακα, έχουμε, για την πρώτη γραμμή:

$$[a_{11} \ldots a_{1n}] = [a_{11}\, 0 \ldots 0] + [0\, a_{12}\, 0 \ldots 0] + \cdots + [0 \ldots 0\, a_{1n}]\ .$$

Άρα η ορίζουσα του πίνακα ισούται με το άθροισμα των οριζουσών n πινάκων, ο κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη γραμμή.

Για $n = 3$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για τη δεύτερη γραμμή καθενός από τους n πίνακες, και γράφουμε κάθε έναν από αυτούς ως άθροισμα n πινάκων, ο κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο στη δεύτερη γραμμή.

Καταλήγουμε με το άθροισμα των οριζουσών n^2 πινάκων ο κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ από ένα μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη γραμμή και στη δεύτερη γραμμή.

Για $n = 3$, έχουμε 3 ορίζουσες από τον $[a_{11}\ 0\ 0]$ πίνακα,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

και άλλες 6 από τους $[0\ a_{12}\ 0]$ και $[0\ 0\ a_{13}]$ πίνακες, συνολικά 9 ορίζουσες.

Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία για την τρίτη και για τις υπόλοιπες γραμμές όλων των πινάκων που προκύπτουν.

Χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς κάθε γραμμή του πίνακα, για να γράψουμε την ορίζουσα ως άθροισμα οριζουσών πινάκων, κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή.

Καταλήγουμε με το άθροισμα των οριζουσών n^n τέτοιων πινάκων.

Εξετάζουμε έναν απο αυτούς τους n^n πίνακες.

Σε κάθε γραμμή έχει μόνον ένα στοιχείο που μπορεί να μην είναι ίσο με 0. Υποθέτουμε οτι στην i γραμμή αυτό το στοιχείο βρίσκεται στη j_i στήλη, είναι δηλαδή το στοιχείο $a_{i\,j_i}$.

Ο πίνακας έχει το πολύ n μη μηδενικά στοιχεία, τα

$$a_{1\,j_1},\ a_{2\,j_2},\ \ldots,\ a_{n\,j_n}\,.$$

Εάν δύο απο τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στην ίδια στήλη, τότε υπάρχει κάποια άλλη στήλη που δεν έχει κανένα μη μηδενικό στοιχείο. Συνεπώς η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδέν.

Συμπεραίνουμε οτι εάν η αντιστοιχία $i \mapsto j_i$ στέλνει δύο διαφορετικά i στο ίδιο j, εάν δηλαδή δεν είναι ενεικονική, τότε η ορίζουσα του πίνακα μηδενίζεται.

Αντιθέτως η ορίζουσα του πίνακα μπορεί να μην μηδενίζεται μόνον όταν η αντιστοιχία $i \mapsto j_i$ είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή όταν είναι μετάθεση του συνόλου $\{1, \ldots, n\}$.

Γνωρίζουμε οτι υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις, και συνεπώς μόνο $n!$ απο τις n^n ορίζουσες μπορεί να μην είναι ίσες με μηδέν.

Για έναν 3×3 πίνακα, από τις $3^3 = 27$ ορίζουσες, επιβιώνουν μόνο $3! = 6$, και έχουμε τον τύπο που γνωρίζουμε:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
$$

Αν συμβολίσουμε σ μία μετάθεση του συνόλου με 3 στοιχεία, $\sigma : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, έχουμε

$$\det A = \sum_{\sigma} \pm a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} a_{3\,\sigma(3)} \,.$$

Το πρόσημο καθορίζεται από την ορίζουσα $\det P_\sigma$ του πίνακα που προκύπτει εάν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού 3×3 πίνακα $\mathbf{I}$.

Η προηγούμενη ανάλυση γενικεύεται σε $n \times n$ πίνακες, και δίδει τον ακόλουθο τύπο για την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα.

Θεώρημα

Εάν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας,

$$\det A = \sum_{\sigma} a_{1\,\sigma(1)} \dots a_{n\,\sigma(n)} \det(P_\sigma)$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται πάνω απο το σύνολο όλων των μεταθέσεων n στοιχείων, και P_σ είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού πίνακα.