ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 43

Συμπαράγοντες και αναπτύγματα της ορίζουσας

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκ 2014

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την πρώτη γραμμή

Θέλουμε να ομαδοποιήσουμε με έναν χρήσιμο τρόπο τους $n!$ όρους του τύπου για την ορίζουσα.

Θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$.

Οι αντίστοιχοι όροι στον τύπο για την ορίζουσα περιέχουν τον παράγοντα a_{11}.

Βγάζουμε το a_{11} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{11} το νέο άθροισμα:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{11}\, a_{2\,\sigma(2)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma &= a_{11} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \right) \\
&= a_{11}\, C_{11} \,.
\end{aligned}$$

Οι μεταθέσεις του $\{1, 2, \dots, n\}$ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$, αντιστοιχούν σε μεταθέσεις του $\{2, 3, \dots, n\}$.

Άρα το άθροισμα C_{11} είναι ακριβώς η ορίζουσα του πίνακα A_{11} που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{\substack{\text{μετάθεση του } \{1, \dots, n\} \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \\ &= \sum_{\text{μετάθεση του } \{2, \dots, n\}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \,. \end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 2$.

Οι αντίστοιχοι όροι στον τύπο για την ορίζουσα περιέχουν τον παράγοντα a_{12}.

Βγάζουμε το a_{12} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{12} το νέο άθροισμα:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{12}\, a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma &= a_{12} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right) \\ &= a_{12}\, C_{12}. \end{aligned}$$

Κάθε μετάθεση σ του $\{1, 2, \ldots, n\}$ για την οποία $\sigma(1) = 2$, αντιστοιχεί σε μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση απο το $\{2, 3, 4, \ldots, n\}$ στο $\{1, 3, 4, \ldots, n\}$.

Το άθροισμα C_{12} διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο απο την ορίζουσα του πίνακα A_{12} που προκύπτει απο τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη.

$$\begin{aligned} C_{12} &= \sum_{\substack{\text{μετάθεση του } \{1, \ldots, n\} \\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \\ &= -\det A_{12} \,. \end{aligned}$$

Γενικότερα θεωρούμε τους όρους στον τύπο για την ορίζουσα που αντιστοιχούν σε μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = j$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{1\,j}\, a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma &= a_{1j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \right) \\
&= a_{1\,j}\, C_{1\,j}
\end{aligned}$$

Το άθροισμα $C_{1\,j}$ διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο απο την ορίζουσα του πίνακα A_{1j} που προκύπτει απο τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη j στήλη:

$$C_{1j} = (-1)^{1+j} \det(A_{1\,j}) \,.$$

Θεωρούμε τώρα όλες τις μεταθέσεις σ του $\{1, \ldots, n\}$, ομαδοποιημένες ανάλογα με την τιμή του $\sigma(1)$.

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{1j}\, a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \right),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\det A = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + \cdots + a_{1n}\, C_{1n}\,.$$

Ελάσσων πίνακας και συμπαράγοντας

Ορισμός. Εάν $A = (a_{i\,j})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας ο οποίος προκύπτει απο το A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και τη j στήλη, ονομάζεται **ελάσσων πίνακας** του στοιχείου $a_{i\,j}$ του A και συμβολίζεται $A_{i\,j}$.

$$A_{i\,j} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,(j-1)} & \times & a_{1\,(j+1)} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)\,1} & \cdots & a_{(i-1)\,(j-1)} & \times & a_{(i-1)\,(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)\,n} \\ \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times \\ a_{(i+1)\,1} & \cdots & a_{(i+1)\,(j-1)} & \times & a_{(i+1)\,(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & \times & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

Ο αριθμός $C_{i\,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i\,j}$ ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** ή **συμπαράγοντας** του στοιχείου $a_{i\,j}$.

Ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς γραμμή ή στήλη

Πρόταση

1. *Για κάθε* $i = 1, \ldots, n$ *ισχύει*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\, C_{i\,j}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\det A$ *ως προς την* i*-γραμμή.*

2. *Για κάθε* $j = 1, \ldots, n$ *ισχύει*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}\, C_{i\,j}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\det A$ *ως προς τη* j*-στήλη.*