ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 45

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκ 2014

Η δράση ενός πίνακα σε ένα διάνυσμα

Συνεχίζουμε να αναφερόμαστε σε $n \times n$ πίνακες.

Θέλουμε να μελετήσουμε πώς δρά ένας πίνακας με πολλαπλασιασμό στα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$,

$$T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax .$$

Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ με ένα $n \times n$ πίνακα, μπορεί να αλλάξει το μήκος και η διεύθυνση του διανύσματος.

Εάν δεν αλλάζει η διεύθυνση του διανύσματος, τότε Ax είναι κάποιο πολλαπλάσιο του x,

$$Ax = \lambda x\,.$$

Αυτός είναι ο πιο απλός τρόπος με τον οποίο δρά η απεικόνιση T_A σε διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Ιδιοδιανύσματα

Τα διανύσματα x που ικανοποιούν την εξίσωση

$$Ax = \lambda x$$

για κάποιο αριθμό λ είναι ειδικά διανύσματα του πίνακα A:

είναι αυτά πάνω στα οποία ο πολλαπλασιασμός με τον A δρα με τον απλούστερο τρόπο.

Γι' αυτό ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα A.

Η εξίσωση $Ax = \lambda x$ έχει πάντα τη μηδενική λύση, $A\,0 = \lambda\,0$.

Μας ενδιαφέρουν οι μη μηδενικές λύσεις.

Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $Ax - \lambda \mathrm{I} x = 0$, και βγάζουμε το x ως κοινό παράγοντα

$$(A - \lambda \mathrm{I})x = 0\,.$$

Βλέπουμε οτι τα x που αναζητούμε βρίσκονται στο μηδενοχώρο του πίνακα $A - \lambda \mathrm{I}$.

Ο ρόλος της ορίζουσας

Πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τους αριθμούς λ για τους οποίους ο πίνακας $A - \lambda \mathrm{I}$ έχει μη τετριμμένο μηδενοχώρο, δηλαδή είναι ιδιόμορφος.

Η ορίζουσα του πίνακα μας δίδει το κατάλληλο κριτήριο:

Ο $A - \lambda \mathrm{I}$ είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0\,.$$

Ιδιοτιμές

Ορισμός. Οι **ιδιοτιμές** του $n \times n$ πίνακα A είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0\,.$$

Η ορίζουσα $\det(A - \lambda \mathrm{I})$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με μεταβλητή λ. Ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A.

Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι οι *ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου*.

Ιδιοδιανύσματα και ιδιόχωρος

Εάν λ_i είναι μία ιδιοτιμή, τότε $A - \lambda_i \mathrm{I}$ έχει μη τετριμμένο μηδενοχώρο.

Ορισμός.
Τα *μη μηδενικά διανύσματα* του μηδενοχώρου του $A - \lambda_i \mathrm{I}$ είναι τα **ιδιοδιανύσματα** του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Όλος ο μηδενοχώρος του $A - \lambda_i \mathrm{I}$ ονομάζεται **ιδιοχώρος** του A για την ιδιοτιμή λ_i.