ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 46
Ιδιόχωροι, πολλαπλότητα ιδιοτιμών

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκ 2014

Ιδιόχωροι πίνακα

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = (1-\lambda)^2(3-\lambda),$$

δηλαδή

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 3.$$

Ο ιδιόχωρος κάθε ιδιοτιμής έχει διάσταση ένα.

Αλγεβρική πολλαπλότητα

Εάν ρ είναι μία ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$, η **πολλαπλότητα** της ρίζας ρ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του δυωνύμου $x - \rho$ που διαιρεί το πολυώνυμο $p(x)$.

Εάν λ_i είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A, ονομάζουμε **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i την πολλαπλότητα της ιδιοτιμής ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(\lambda)$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2, ενώ η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1.

Γεωμετρική Πολλαπλότητα

Ονομάζουμε **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i τη διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή, δηλαδή τη διάσταση του μηδενόχωρου του πίνακα $A - \lambda \mathrm{I}$.

Η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι πάντα ίση ή μικρότερη από την αλγεβρική πολλαπλότητα.

Στο παράδειγμα, η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1, παρ' όλο που έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2.

Μιγαδικές ιδιοτιμές

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = (\lambda^2 - 8\lambda + 25)(2 - \lambda).$$

Το πολυώνυμο έχει μία πραγματική ρίζα, $\lambda_1 = 2$.

Οι άλλες δύο ρίζες είναι μιγαδικές,

$$\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i} \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 4 - 3\mathrm{i}.$$

Αντικαθιστώντας τις μιγαδικές ιδιοτιμές στον πίνακα $A - \lambda \mathrm{I}$ έχουμε έναν πίνακα με μιγαδικές συνιστώσες.

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία της απαλοιφής Gauss βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$(A - \lambda \mathrm{I})x = 0\,.$$

Αυτές είναι διανύσματα με μιγαδικές συνιστώσες, και βρίσκονται στον χώρο των διατεταγμένων τριάδων μιγαδικών αριθμών, που συμβολίζεται $\mathbb{C}^3$.

Το γινόμενο και το άθροισμα των ιδιοτιμών

Πρόταση

Θεωρούμε έναν $n \times n$ πίνακα A πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς. Μετρώντας την αλγεβρική πολλαπλότητα, ο πίνακας έχει n ιδιοτιμές, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, όχι υποχρεωτικά όλες διαφορετικές.

1. *Το άθροισμα των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με το άθροισμα των διαγώνιων συνιστωσών του πίνακα,*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \,.$$

2. *Το γινόμενο των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα,*

$$\lambda_1 \, \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A \,.$$

Ίχνος πίνακα

Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα ονομάζεται **ίχνος** του πίνακα και συμβολίζεται $\mathrm{tr}\, A$,

$$\mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \,.$$

Το ίχνος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

1. $\mathrm{tr}\,(A + B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$,
2. $\mathrm{tr}\,(A^T) = \mathrm{tr}\, A$,
3. $\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$.