MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 47
Διαγωνιοποίηση

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Δεκ 2014

Γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

Θα δείξουμε οτι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Αυτό συνεπάγεται οτι εάν ένας $n \times n$ πίνακας έχει n *διαφορετικές* ιδιοτιμές, τότε έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Συνεπώς υπάρχει μία βάση του χώρου $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα.

Λήμμα

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Είδαμε οτι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

έχει ιδιοδιανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ για την ιδιοτιμή } \lambda_1 = 1\,,$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ για την ιδιοτιμή } \lambda_2 = 3\,.$$

Εάν ένα διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων v_1 και v_2, εύκολα υπολογίζουμε τη δράση του A:

εάν $x = 2v_1 + 5v_2$, τότε

$$\begin{aligned} Ax &= 2Av_1 + 5Av_2 \\ &= 2(\lambda_1 v_1) + 5(\lambda_2 v_2) \\ &= 2v_1 + 15v_2 \,. \end{aligned}$$

Διαγωνιοποίηση

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση που ο $n \times n$ πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, $v_1, \ldots, v_n$,

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad \ldots, \quad Av_n = \lambda_n v_n \,.$$

Θεωρούμε τον πίνακα R με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Όταν πολλαπλασιάσουμε τον R με τον A από τα αριστερά, κάθε στήλη του R πολλαπλασιάζεται με την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το να πολλαπλασιάσουμε τον R από τα δεξιά με έναν διαγώνιο πίνακα Λ με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο,

$$AR = R\Lambda \,.$$

Διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες

Θεώρημα

Εάν ένας $n \times n$ πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, και R είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, τότε ο πίνακας

$$\Lambda = R^{-1}AR$$

είναι διαγώνιος, με τις ιδιοτιμές του A στη διαγώνιο,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Ένας $n \times n$ πίνακας A που έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα ονομάζεται **διαγωνιοποιήσιμος**.

Είναι εύκολο να υπολογίζουμε δυνάμεις διαγωνιοποιήσιμων πινάκων.

$$A^2 = (R^{-1}\Lambda R)(R^{-1}\Lambda R) = R^{-1}\Lambda^2 R\,.$$

Γενικότερα,

$$A^k = R^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} R\,.$$

και ακόμα

$$e^A = R^{-1}e^\Lambda R = R^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} R\,.$$

Έχουμε δει οτι ένας πίνακας με n διαφορετικές ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Σε επόμενα μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας θα εξετάσουμε γενικότερες κατηγορίες πινάκων που είναι διαγωνιοποιήσιμοι.