ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων

Ενότητα: 2-Δ συνεχή σήματα

Καθηγητής Γεώργιος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Κεφάλαιο 3

2-Δ συνεχή σήματα

Μία συνεχής εικόνα μπορεί να παρασταθεί από ένα 2-Δ συνεχές σήμα, δηλαδή από μία συνάρτηση, $f(x, y)$. Ιδιαίτερης σημασίας για την επεξεργασία των σημάτων είναι ο μετασχηματισμός Fourier, που δίδει την παράσταση των σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων. Ο μετασχηματισμός Fourier ενός 2-Δ συνεχούς σήματος δίδεται ως εξής

$$F(u,v) = \mathcal{F}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy. \tag{3.1}$$

Ικανή συνθήκη ύπαρξης του μετασχηματισμού είναι η ύπαρξη του ολοκληρώματος κατ΄ απόλυτο τιμή,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|dxdy < \infty.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίδεται ως εξής

$$f(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[F(u,v)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv. \tag{3.2}$$

Αν (x, y) είναι οι συντεταγμένες στο 2-Δ χώρο, τότε (u, v) είναι συχνότητες στο χώρο. Η μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι αντίστοιχη της μονάδας μέτρησης των αποστάσεων στο επίπεδο των (x, y). Πολύ συχνά όμως, εφόσον πρόκειται για σήματα εικόνων, οι συντεταγμένες (x, y) κανονικοποιούνται ως προς τη γωνία όρασης, μ΄ αποτέλεσμα οι συχνότητες (u, v) να μετρώνται σε κύκλους ανά μοίρα της γωνίας όρασης.

Για τη μελέτη τόσο της δειγματοληψίας, όσο και της συμπεριφοράς γραμμικών συστημάτων επεξεργασίας 2-Δ συνεχών σημάτων, είναι πολύ χρήσιμη η εισαγωγή της 2-Δ κατανομής Dirac

$$\delta(x,y) = 0, |x| + |y| \neq 0 \tag{3.3}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x,y)dxdy = 1 \tag{3.4}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της κατανομής Dirac είναι ίσος με τη μονάδα για όλες τις συχνότητες

$$\mathcal{F}[\delta(x,y)] = 1 \tag{3.5}$$

Η κατανομή Dirac μπορεί να εκφράσει τη λήψη ενός δείγματος από ένα σήμα

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\delta(x-x',y-y')dx'dy' = f(x,y) \tag{3.6}$$

Δίδονται στη συνέχεια μερικές βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (Εξίσωση 3.1)

1. Μετατόπιση

$$\mathcal{F}[f(x-x_0, y-y_0)] = e^{-j2\pi(x_0u+y_0v)}F(u,v) \tag{3.7}$$

2. Περιστροφή

$$\mathcal{F}[f(y,-x)] = F(v,-u) \tag{3.8}$$

3. Διαχωρισιμότητα

$$\text{Αν} \quad f(x,y) = f_1(x)f_2(y), \text{τότε} \quad F(u,v) = F_1(u)F_2(v) \tag{3.9}$$

όπου $F_1(u)$ (αντίστοιχα $F_2(v)$) είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f_1(x)$ (αντίστοιχα $f_2(y)$).

4. Αλλαγή κλίμακας

$$\mathcal{F}[f(ax,by)] = \frac{1}{|ab|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b}) \tag{3.10}$$

5. Παραγώγιση

$$\mathcal{F}[f_x(x,y)] = j2\pi uF(u,v) \quad \text{και} \quad \mathcal{F}[f_y(x,y)] = j2\pi vF(u,v) \tag{3.11}$$

6. Συνέλιξη
Η 2-Δ συνέλιξη της $h(.,.)$ με την $f(.,.)$ ορίζεται ως ακολούθως

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x',y')f(x-x',y-y')dx'dy' \tag{3.12}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $G(u,v)$ της $g(x,y)$ έχει ως εξής

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) \tag{3.13}$$

όπου $H(u,v)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $h(x,y)$.

7. Εσωτερικό γινόμενο

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g^*(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)G^*(u,v)dudv \tag{3.14}$$

Δίδονται ακόμη στη συνέχεια οι μετασχηματισμοί Fourier τριών χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

1. Μιγαδική εκθετική συνάρτηση

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi(u_0x+v_0y)}] = \delta(u-u_0, v-v_0) \tag{3.15}$$

2. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο
Η συνάρτηση ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ορίζεται ως εξής

$$\Pi_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad |x| \leq 0,5 \quad \text{και} \ |y| \leq 0,5 \\ 0 & \text{αν} \quad |x| > 0,5 \quad \text{είτε} \ |y| > 0,5 \end{cases} \tag{3.16}$$

Τότε έχουμε

$$\mathcal{F}[\Pi_2(x,y)] = \frac{\sin \pi u}{\pi u}\frac{\sin \pi v}{\pi v} \tag{3.17}$$

3. Συνάρτηση Gauss

$$\mathcal{F}[e^{-\pi(x^2+y^2)}] = e^{-\pi(u^2+v^2)} \tag{3.18}$$

Ασκήσεις

1. Βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier των σημάτων

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \sin 2\pi x\eta_1 \cos 2\pi y\eta_2 \\ \text{b)} & \cos 2\pi(x\eta_1 + y\eta_2) \end{array}$$

2. Εάν $F(u,v)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του 2-Δ σήματος $f(x,y)$, να ευρεθούν οι μετασχηματισμοί Fourier των δύο πρώτων μερικών παραγώγων του $f(x,y)$. Ο Λαπλασιανός τελεστής ορίζεται ως το άθροισμα των δύο δεύτερων μερικών παραγώγων ως προς τις δύο μεταβλητές. Ποιός είναι ο μετασχηματισμός Fourier της Λαπλασιανής του $f(x,y)$;

3. Ορίζεται το ζεύγος μέσων τιμών του 2-Δ σήματος $f(x,y)$ ως ακολούθως

$$(x_0, y_0) = (\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy, \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy)$$

Το ισοδύναμο χωρικό εύρος 2-Δ σήματος ορίζεται ως εξής

$$E_\chi = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)f^2(x,y)dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x,y)dxdy}}$$

Εάν $F(u,v)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $f(x,y)$, ορίζεται το ισοδύναμο εύρος συχνοτήτων του σήματος

$$E_\nu = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left((u-u_0)^2+(v-v_0)^2\right)F^2(u,v)dudv}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F^2(u,v)dudv}}$$

όπου τό ζεύγος (u_0, v_0) ορίζεται όπως παραπάνω για το $F(u,v)$. Να ευρεθεί το ισοδύναμο χωρικό εύρος και το ισοδύναμο εύρος συχνοτήτων του σήματος

$$f(x,y) = \exp(-\pi(x^2+y^2))$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης