ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων

Ενότητα: Μετασχηματισμός Fourier 2-Δ ακολουθιών

Καθηγητής Γεώργιος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Κεφάλαιο 5

Μετασχηματισμός Fourier 2-Δ ακολουθιών

Ας είναι $x(m,n)$ μία 2-Δ ακολουθία ορισμένη στο επίπεδο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}^2$. Ο μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $x(m,n)$ είναι μια περιοδική συνάρτηση των συχνοτήτων (u,v) με περίοδο 1 και για τις δύο συχνότητες.

$$X(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n) e^{-j2\pi(um+vn)}. \tag{5.1}$$

Η ύπαρξη του μετασχηματισμού προϋποθέτει ότι οι τιμές της 2-Δ ακολουθίας ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(m,n)| < \infty. \tag{5.2}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίδει την αρχική ακολουθία

$$x(m,n) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} X(u,v) e^{j2\pi(um+vn)} du dv. \tag{5.3}$$

Δίδονται στη συνέχεια μερικές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, παρόμοιες με τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier 2-Δ συνεχών σημάτων.

1. Γραμμικότητα
   Κάθε γραμμικός συνδυασμός σημάτων μετασχηματίζεται στον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των μετασχηματισμών Fourier των σημάτων.

2. Μετατόπιση

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m-m_0, n-n_0) e^{-j2\pi(um+vn)} = e^{-j2\pi(um_0+vn_0)} X(u,v) \tag{5.4}$$

3. Διαχωρισιμότητα

$$\text{Αν} \quad x(m,n) = x_1(m)x_2(n), \text{τότε} \quad X(u,v) = X_1(u)X_2(v), \tag{5.5}$$

   όπου $X_1(u)$ (αντίστοιχα $X_2(v)$) είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $x_1(m)$ (αντίστοιχα $x_2(n)$).

4. Σταθερή τιμή

$$X(0,0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n). \tag{5.6}$$

5. Διαμόρφωση
Ο πολλαπλασιασμός με μία εκθετική αρμονική συνάρτηση,

$$y(m,n) = x(m,n)e^{j2\pi(u_0 m + v_0 n)}, \tag{5.7}$$

συνεπάγεται μετατόπιση στο πεδίο των χωρικών συχνοτήτων,

$$Y(u,v) = X(u-u_0, v-v_0). \tag{5.8}$$

6. Συνέλιξη
Η 2-Δ συνέλιξη της $h(.,.)$ με την $x(.,.)$ ορίζεται ως ακολούθως

$$y(m,n) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(m',n')x(m-m',n-n'). \tag{5.9}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $Y(u,v)$ της $y(m,n)$ έχει ως εξής

$$Y(u,v) = H(u,v)X(u,v). \tag{5.10}$$

όπου $H(u,v)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ths $h(m,n)$.

7. Πολλαπλασιασμός
Ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου δύο 2-Δ ακολουθιών, $x(m,n)$ και $y(m,n)$, δίδεται ως εξής

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n)y(m,n)e^{-j2\pi(um+vn)} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} X(u',v')Y(u-u',v-v')du'dv', \tag{5.11}$$

όπου $X(u,v)$ και $Y(u,v)$ είναι όπως παραπάνω.

8. Εσωτερικό γινόμενο

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n)y^*(m,n) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} X(u,v)Y^*(u,v)dudv. \tag{5.12}$$

Κατά συνέπεια η ενέργεια ενός σήματος διατηρείται μετά το μετασχηματισμό,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(m,n)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |X(u,v)|^2 dudv. \tag{5.13}$$

Ακολουθούν παραδείγματα αναλυτικών εκφράσεων για το μετασχηματισμό Fourier.

Παράδειγμα 5.1. Ας είναι

$$x(m,n) = \begin{cases} 1 & m^2+n^2=0 \\ 1/2 & m^2+n^2=1 \\ 1/4 & m^2+n^2=2 \\ 0 & m^2+n^2>2 \end{cases}$$

2-Δ διακριτό σήμα πεπερασμένης έκτασης. Διαπιστώνουμε ότι το σήμα είναι διαχωρίσιμο με

$$x_1(m) = x_2(m) = \begin{cases} 1 & |m| = 0 \\ 1/2 & |m| = 1 \\ 0 & |m| > 1 \end{cases}$$

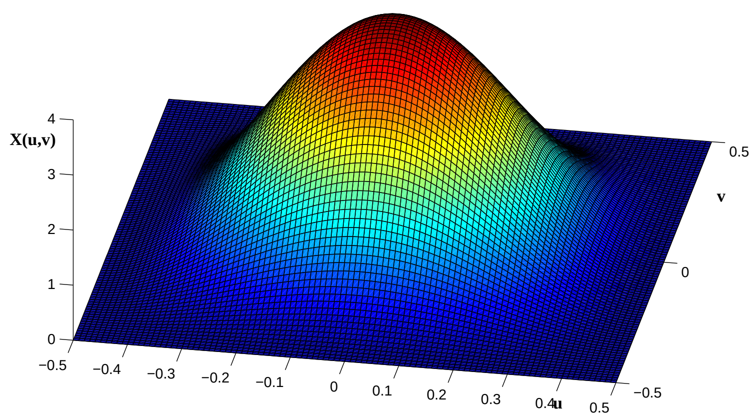
Άμεσα από τον ορισμό του μετασχηματισμού προκύπτει ότι

$$X_1(u) = e^{j2\pi u} + 1 + e^{-j2\pi u} = 1 + 2\cos 2\pi u = 2\cos^2 \pi u.$$

Άρα για το 2-Δ σήμα, λόγω διαχωρισιμότητας, θα ισχύει

$$X(u,v) = 4\cos^2 \pi u \cos^2 \pi v.$$

Στο Σχήμα 5.1 δίδεται ο μετασχηματισμός Fourier.



Σχήμα 5.1: Μετασχηματισμός Fourier της πεπερασμένης έκτασης ακολουθίας του παραδείγματος 5.1.

Παράδειγμα 5.2. Ας είναι

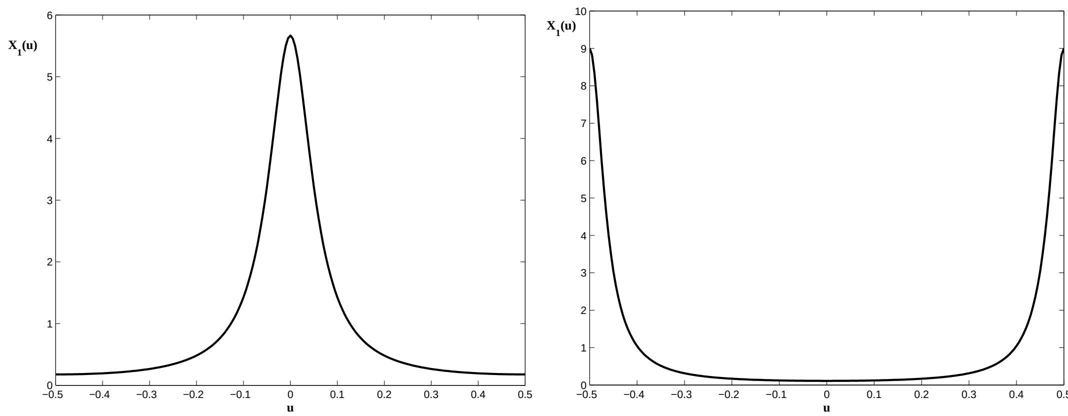
$$x(m,n) = \alpha^{|m|}\beta^{|n|}, \quad |\alpha| < 1, \quad |\beta| < 1$$

2-Δ διακριτό σήμα. Αφού το σήμα είναι διαχωρίσιμο, αρκεί να ευρεθούν οι δύο μονοδιάστατοι μετασχηματισμοί Fourier. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} X_1(u) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^{|m|} e^{-j2\pi u m} = \sum_{m=-\infty}^{0} \alpha^{|m|} e^{-j2\pi u m} + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{|m|} e^{-j2\pi u m} - 1 \\ &= \sum_{m=-\infty}^{0} (\alpha e^{j2\pi u})^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha e^{-j2\pi u})^{m} - 1 = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha e^{j2\pi u})^{m} + \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha e^{-j2\pi u})^{m} - 1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha e^{j2\pi u}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi u}} - 1 = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha e^{j2\pi u})(1-\alpha e^{-j2\pi u})} \\ &= \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos(2\pi u)+\alpha^2} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Οι τιμές του μετασχηματισμού δίδονται γραφικά στο Σχήμα 5.2 για δύο διαφορετικές τιμές του α, μία θετική και μία αρνητική. Τελικά ο μετασχηματισμός Fourier της $x(m,n)$ είναι

$$X(u,v) = \frac{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{(1-2\alpha\cos(2\pi u)+\alpha^2)(1-2\beta\cos(2\pi v)+\beta^2)} \tag{5.15}$$



(a) (b)

Σχήμα 5.2: Μετασχηματισμός Fourier εκθετικά φθίνουσας ακολουθίας για (a) $\alpha = 0.7$, (b) $\alpha = -0.8$.

Άσκηση

Δίδονται τα ακόλουθα σήματα

- $f_1(m,n) = \begin{cases} 1 & |m|+|n|=0 \\ 1/2 & |m|+|n|=1 \\ 1/4 & |m|+|n|=2 \\ 0 & |m|+|n|>2 \end{cases}$

- $f_2(m,n) = \begin{cases} 1/8 & m=-1 & \text{και} & |n|=1 \\ 1/4 & m=-1 & \text{και} & n=0 \\ -1/4 & m=1 & \text{και} & n=0 \\ -1/8 & m=1 & \text{και} & |n|=1 \\ 0 & |m|\neq 1 & \text{είτε} & |n|>1 \end{cases}$

Για καθένα από τα σήματα αυτά ζητείται εάν είναι διαχωρίσιμο, και να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.