ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων

Ενότητα: 2-Δ διακριτά συστήματα

Καθηγητής Γεώργιος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Κεφάλαιο 7

2-Δ διακριτά συστήματα

Ένα 2-Δ διακριτό σύστημα (ή φίλτρο) δέχεται στην είσοδό του ένα 2-Δ διακριτό σήμα $x(m,n)$ και δίδει σαν απόκριση ένα μοναδικό 2-Δ διακριτό σήμα $y(m,n)$

$$y(m,n) = \mathcal{H}[x(m,n)]. \tag{7.1}$$

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό, αν, και μόνο αν, η απόκριση του συστήματος σε κάθε γραμμικό συνδυασμό εισόδων $x_1(m,n)$ και $x_2(m,n)$ είναι ο ίδιος γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων εξόδων $y_1(m,n)$ και $y_2(m,n)$

$$\mathcal{H}[a_1x_1(m,n) + a_2x_2(m,n)] = a_1y_1(m,n) + a_2y_2(m,n), \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

Ορίζεται η ακολουθία $\delta(m,n)$ του Kronecker κατά τον ακόλουθο τρόπο

$$\delta(m,n) = \begin{cases} 1 & (m,n) = (0,0) \\ 0 & (m,n) \neq (0,0) \end{cases} \tag{7.3}$$

Οποιοδήποτε σήμα επομένως θα μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικός συνδυασμός των δειγμάτων του,

$$x(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(m-k, n-l)x(k,l).$$

Άρα η έξοδος ενός γραμμικού συστήματος γράφεται ως εξής

$$y(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(m-k, n-l; m,n)x(k,l). \tag{7.4}$$

7.1 Γραμμικά αμετάβλητα σε μετατόπιση συστήματα

Στην περίπτωση που η απόκριση του συστήματος είναι αμετάβλητη σε μια μετατόπιση της εισόδου, δηλαδή αν μία μετατόπιση της εισόδου συνεπάγεται την ίδια ακριβώς μετατόπιση της εξόδου, χωρίς καμία άλλη αλλαγή, τότε η σχέση εισόδου-εξόδου γίνεται

$$y(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(m-k, n-l)x(k,l). \tag{7.5}$$

Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι $h(m,n)$ είναι η απόκριση του συστήματος στην ακολουθία $\delta(m,n)$.

Γι΄ αυτό το λόγο η 2-Δ ακολουθία $h(m,n)$ ονομάζεται κρουστική απόκριση του συστήματος (ή φίλτρου). Η έξοδος επομένως ενός γραμμικού αμετάβλητου σε μετατόπιση συστήματος προκύπτει από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος.

Η συνέλιξη έχει την ιδιότητα της συμμετρικότητας. Άρα ισχύει επίσης

$$y(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k,l)x(m-k,n-l).$$

Η συνέλιξη έχει και την προσεταιριστική ιδιότητα, που σημαίνει ότι δύο συστήματα στη σειρά ισοδυναμούν με ένα σύστημα με κρουστική απόκριση τη συνέλιξη των δύο αντίστοιχων κρουστικών αποκρίσεων. Η συνέλιξη έχει επίσης την επιμεριστική ιδιότητα, που σημαίνει πως αν δύο συστήματα χρησιμοποιηθούν παράλληλα, με την ίδια είσοδο, και υπερτεθούν οι δύο έξοδοι, είναι ταυτόσημο μ΄ ένα σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση είναι το άθροισμα των δύο κρουστικών αποκρίσεων.

Αν η κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι διαχωρίσιμη

$$h(m,n) = h_1(m)h_2(n), \tag{7.6}$$

η απόκριση του συστήματος μπορεί να υπολογισθεί χωριστά στους δύο δείκτες (m,n), με αποτέλεσμα οικονομία και απλοποίηση των υπολογισμών.

Παράδειγμα 7.1. Το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(m,n) = \begin{cases} 1/6 & m=-1 \quad \text{και} \quad |n| \leq 1 \\ -1/6 & m=1 \quad \text{και} \quad |n| \leq 1 \\ 0 & |m| \neq 1 \quad \text{είτε} \quad |n| > 1 \end{cases}$$

είναι διαχωρίσιμο, με

$$h_1(m) = \begin{cases} 1/2 & m=-1 \\ -1/2 & m=1 \\ 0 & |m| \neq 1 \end{cases} \qquad \text{και} \quad h_2(n) = \begin{cases} 1/3 & |n| \leq 1 \\ 0 & |n| > 1 \end{cases}$$

Το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier της $h(m,n)$ είναι μηδέν, ενώ το φανταστικό μέρος δίδεται στο Σχήμα 7.1.

Ένα γραμμικό σύστημα ονομάζεται αμετάβλητο στην περιστροφή, αν η κρουστική του απόκριση είναι συνάρτηση μόνο μιας μεταβλητής, της απόστασης d από την αρχή των αξόνων

$$h(m,n) = h_0(d). \tag{7.7}$$

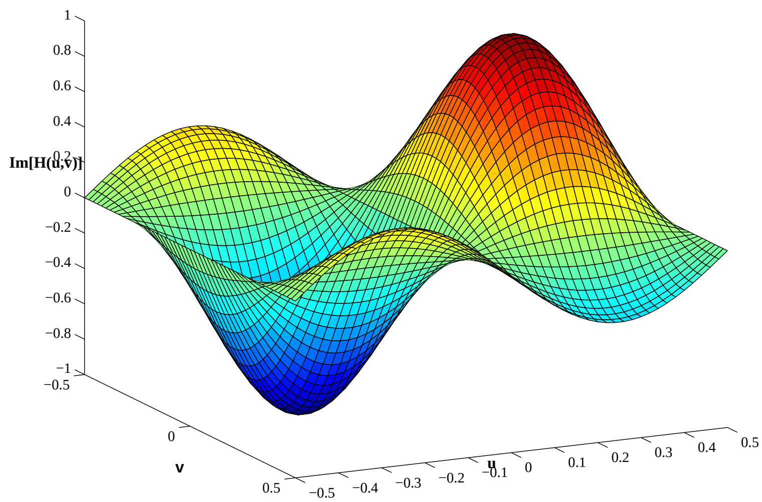
Η ακριβής έκφραση της $h(m,n)$ εξαρτάται από τον ορισμό της απόστασης. Δυνατές εκφράσεις είναι οι ακόλουθες: $d = \sqrt{m^2+n^2}$ ή $d = |m|+|n|$.

Παράδειγμα 7.2. Το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(m,n) = \begin{cases} 1 & m^2+n^2=0 \\ 1/2 & m^2+n^2=1 \\ 1/4 & m^2+n^2=2 \\ 0 & m^2+n^2>2 \end{cases}$$

είναι αμετάβλητο στην περιστροφή. Είναι επίσης διαχωρίσιμο με

$$h_1(m) = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 1/2 & |m|=1 \\ 0 & |m|>1 \end{cases}$$



Σχήμα 7.1: Μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης του παραδείγματος 7.1.

και $h_2(n) = h_1(n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος αυτού δίδεται στο Σχήμα 5.1.

Λέμε ότι ένα φίλτρο είναι πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, αν η $h(m, n)$ παίρνει μη μηδενικές τιμές μόνο σ′ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων (m, n), αν δηλαδή

$$h(m, n) = 0, |m| > M, |n| > N. \tag{7.8}$$

Και τα δύο συστήματα που δόθηκαν στα δύο παραπάνω παραδείγματα έχουν πεπερασμένη κρουστική απόκριση ($M = N = 1$). Στην αντίθετη περίπτωση το φίλτρο ονομάζεται άπειρης κρουστικής απόκρισης.

Παράδειγμα 7.3. Το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(m, n) = \alpha^{|m|}\beta^{|n|}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2$$

είναι διαχωρίσιμο και εκτείνεται σε όλο το επίπεδο των ακεραίων. Αν $\alpha = \beta$, το σύστημα είναι αμετάβλητο στην περιστροφή, με απόσταση $d = |m| + |n|$.

Τα φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης δεν παρουσιάζουν καμία δυσκολία υλοποίησης. Αντίθετα τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης μπορούν να υλοποιηθούν μόνο αν μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια μιας αναδρομικής σχέσης, δηλαδή μιας 2-Δ εξίσωσης διαφοράς, όπως η ακόλουθη

$$y(m, n) = \sum_{(k,l)\in D_a} a(k, l)y(m - k, n - l) + \sum_{(k,l)\in D_b} b(k, l)x(m - k, n - l), \tag{7.9}$$

όπου τα σύνολα D_a και D_b είναι πεπερασμένα. Η παραπάνω σχέση ορίζει μοναδικά ένα γραμμικό σύστημα μόνο εφόσον ορισθούν οι οριακές συνθήκες. Το γραμμικό σύστημα που ορίζεται μ′ αυτόν τον τρόπο είναι αμετάβλητο σε μετατόπιση υπό τις προϋποθέσεις που ακολουθούν. Κατ′ αρχήν απαιτείται η εξασφάλιση της δυνατότητας αναδρομικών υπολογισμών, θέμα που αναπτύσσεται με λεπτομέρεια στην επόμενη παράγραφο. Στη συνέχεια πρέπει να προσδιορισθεί η οριακή περιοχή, η οποία προκύπτει ως το συμπλήρωμα της περιοχής της απόκρισης. Η περιοχή της απόκρισης προσδιορίζεται μέσω της περιοχής της κρουστικής απόκρισης και της περιοχής της εισόδου $x(m,n)$, όπως αυτή υπεισέρχεται στο δεύτερο μέρος της Εξίσωσης (7.9). Η απόκριση στην οριακή περιοχή πρέπει να παίρνει μηδενικές τιμές, για να είναι το σύστημα που ορίζει η 2-Δ εξίσωση διαφοράς αμετάβλητο σε μετατόπιση, και να χαρακτηρίζεται από τη συνέλιξη κρουστικής απόκρισης και εισόδου.

Για να είναι η σχέση (7.9) αναδρομική απαιτείται κατ' αρχήν να ορισθεί μία σχέση διάταξης στο επίπεδο των ακεραίων αριθμών, με δοσμένο ότι δεν υπάρχει φυσική διάταξη για ζεύγη ακεραίων αριθμών. Ας υποθέσουμε ότι υιοθετείται η λεξικογραφική διάταξη, με τη σειρά που εμφανίζονται οι δύο δείκτες που προσδιορίζουν ένα σημείο. Η σχέση (7.9) είναι αναδρομική, αν, για μιά δοσμένη διάταξη, το σύνολο D_a είναι τέτοιο ώστε το σημείο (m,n) να έπεται όλων των σημείων $(m-k,n-l)$, όπου $(k,l) \in D_a$. Για τη λεξικογραφική διάταξη, και για L_1, L_2 ακέραιους αριθμούς, έχουμε

$$D_a = \{(k,l) : k = 0, 0 < l \leq L_2 \quad \text{είτε} \quad 0 < k \leq K, L_1 \leq l \leq L_2\}. \tag{7.10}$$

Όποια κι αν είναι η θεωρούμενη διάταξη, για να είναι η σχέση (7.9) αναδρομική, απαιτείται όλα τα σημεία του D_a να εγκλείονται σ' ένα τομέα με κορυφή το σημείο $(0,0)$ και άνοιγμα αυστηρά μικρότερο από π, κι επιπλέον $(0,0) \notin D_a$.

Ας θεωρήσουμε τώρα το καθαρά αναδρομικό φίλτρο που δίδεται από την ακόλουθη 2-Δ εξίσωση διαφοράς

$$y(m,n) = \sum_{(k,l)\in D_a} a(k,l)y(m-k,n-l) + x(m,n). \tag{7.11}$$

Η κρουστική απόκριση αυτού του φίλτρου είναι λύση της εξίσωσης

$$h(m,n) = \sum_{(k,l)\in D_a} a(k,l)h(m-k,n-l) + \delta(m,n). \tag{7.12}$$

Μία τέτοια κρουστική απόκριση μπορεί να πάρει μη μηδενικές τιμές σε όλα τα σημεία του ελάχιστου τομέα που με κορυφή το σημείο $(0,0)$ εγκλείει όλα τα σημεία του D_a. Είναι τότε δυνατό να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $L_1 = 0$, ο μέγιστος τέτοιος τομέας έχει άνοιγμα $\pi/2$, και τότε αναφερόμαστε σε ένα φίλτρο ενός τέταρτου του επιπέδου. Στην αντίθετη περίπτωση αναφερόμαστε σ' ένα φίλτρο ενός μη συμμετρικού ημιεπιπέδου.

Παράδειγμα 7.4. Η σχέση εισόδου/εξόδου

$$y(m,n) = \alpha y(m-1,n) + \beta y(m,n-1) + x(m,n)$$

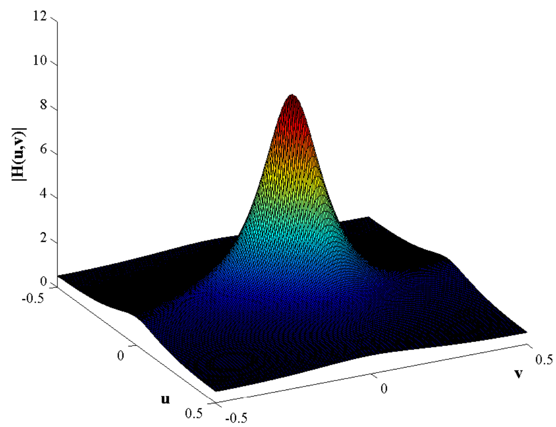
ορίζει ένα φίλτρο ενός τετάρτου του επιπέδου, ενώ η σχέση εισόδου/εξόδου

$$y(m,n) = \alpha y(m-1,n+1) + \beta y(m,n-1) + x(m,n)$$

ορίζει ένα φίλτρο ενός μη συμμετρικού ημιεπιπέδου. Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου που ορίζεται στο τέταρτο του επιπέδου είναι

$$H(u,v) = \frac{1}{1 - \alpha \exp(-2\pi ju) - \beta \exp(-2\pi jv)}.$$

Για $\alpha = 0,55$ και $\beta = 0,35$ στο Σχήμα 7.2 δίδεται η γραφική παράσταση του μέτρου του μετασχηματισμού Fourier.



Σχήμα 7.2: Μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης του παραδείγματος 7.4.

7.2 2-Δ μετασχηματισμός Z

Πριν προχωρήσουμε στο θέμα της ευστάθειας ενός φίλτρου με άπειρης έκτασης κρουστική απόκριση, και για τις ανάγκες της μελέτης της ευστάθειας μεταξύ άλλων, δίνουμε στη συνέχεια τον ορισμό και μερικές ιδιότητες του 2-Δ μετασχηματισμού Z. Ο 2-Δ μετασχηματισμός Z αποτελεί γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier 2-Δ διακριτών ακολουθιών. Ο μετασχηματισμός Z του 2-Δ διακριτού σήματος $x(m,n)$ ορίζεται ως εξής

$$X(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n}, \tag{7.13}$$

όπου z_1 και z_2 είναι μιγαδικές μεταβλητές. Το σύνολο των τιμών των z_1 και z_2 για τις οποίες το άθροισμα (7.13) υπάρχει, ονομάζεται περιοχή σύγκλισης. Πρόκειται για το σύνολο των τιμών των z_1 και z_2 για τα οποία υπάρχει το ακόλουθο άθροισμα

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(m,n)||z_1|^{-m}|z_2|^{-n} < \infty. \tag{7.14}$$

Επομένως η περιοχή σύγκλισης ορίζεται στο επίπεδο $(|z_1|, |z_2|)$. Για 2-Δ σήματα πεπερασμένης έκτασης η περιοχή σύγκλισης είναι ολόκληρο το επίπεδο $(|z_1|, |z_2|)$, εκτός ίσως των σημείων όπου $|z_1| = 0, |z_1| = \infty, |z_2| = 0, |z_2| = \infty$. Για 2-Δ σήματα περιορισμένα στο πρώτο τέταρτο του επιπέδου, αν το $(|z_1'|, |z_2'|)$ ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, τότε κάθε σημείο τέτοιο ώστε $|z_1| \geq |z_1'|$ και $|z_2| \geq |z_2'|$ ανήκει επίσης. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z δίδει την αρχική ακολουθία

$$x(m,n) = \frac{1}{(j2\pi)^2} \oint \oint X(z_1, z_2) z_1^{m-1} z_2^{n-1} dz_1 dz_2, \tag{7.15}$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται με φορά αντίστροφη εκείνης των δεικτών ενός ρολογιού πάνω σε κλειστές καμπύλες που ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης και περικλείουν την αρχή $(0,0)$. Για την αντιστροφή ιδιαίτερα χρήσιμος είναι ο τύπος του Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{j2\pi} \oint \frac{f(z)dz}{z - z_0},$$

όπου η κλειστή καμπύλη και η ολοκλήρωση είναι ως ανωτέρω κι επιπλέον η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική, δηλαδή παραγωγίζεται σε όλα τα σημεία του κλειστού συνόλου που ορίζει η καμπύλη του ολοκληρώματος. Ο ανωτέρω τύπος επεκτείνεται σε παραγώγους οποιασδήποτε τάξης,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{j2\pi} \oint \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \tag{7.16}$$

όπου n μη αρνητικός ακέραιος.

Παράδειγμα 7.5. Ας θεωρήσουμε το μετασχηματισμό

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - \alpha z_1^{-1} - \beta z_2^{-1}}. \tag{7.17}$$

Η Εξίσωση (7.15) σε συνδυασμό με το γενικό τύπο του Cauchy της Εξίσωσης (7.16) δίδει την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$h(m,n) = \frac{(m+n)!}{m!n!}\alpha^m \beta^n, \quad m \geq 0, n \geq 0. \tag{7.18}$$

Ας έλθουμε τώρα σε μερικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Z. Κατ' αρχή ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός.

1. Μετατόπιση

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m-m_0, n-n_0) z_1^{-m} z_2^{-n} = z_1^{-m_0} z_2^{-n_0} X(z_1, z_2) \tag{7.19}$$

2. Διαχωρισιμότητα

$$\text{Αν} \;\; x(m,n) = x_1(m)x_2(n), \text{τότε} \;\; X(z_1,z_2) = X_1(z_1)X_2(z_2) \tag{7.20}$$

   όπου $X_1(z_1)$ (αντίστοιχα $X_2(z_2)$) είναι ο μετασχηματισμός Z της $x_1(m)$ (αντίστοιχα $x_2(n)$).

3. Συμμετρική ακολουθία
   Αν η ακολουθία $y(m,n)$ είναι συμμετρική της $x(m,n)$, δηλαδή αν $y(m,n) = x(-m,-n)$, τότε

$$Y(z_1, z_2) = X(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \tag{7.21}$$

4. Συνέλιξη
   Ο μετασχηματισμός Z της $y(m,n)$, που προκύπτει ως συνέλιξη της $h(.,.)$ με τη $x(.,.)$, που δίδεται στην Εξίσωση (7.5), έχει ως εξής

$$Y(z_1,z_2) = H(z_1,z_2)X(z_1,z_2), \tag{7.22}$$

   όπου $H(z_1,z_2)$ είναι ο μετασχηματισμός Z της $h(m,n)$, και ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

7.3 Ευστάθεια

Ένα σύστημα ονομάζεται ευσταθές, αν για μια φραγμένη είσοδο $(|x(m,n))| < \infty, \forall(m,n))$, η έξοδος είναι φραγμένη $(|y(m,n))| < \infty, \forall(m,n))$. Αυτό ισοδυναμεί με την ύπαρξη του ακόλουθου αθροίσματος

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(m,n)| < \infty. \tag{7.23}$$

Πράγματι, θα έχουμε

$$|y(m,n))| < \sum_{m'=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}|h(m',n')x(m-m',n-n')| < \max|x(m,n))|\sum_{m'=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}|h(m',n')| < \infty.$$

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή η συνθήκη της Εξίσωσης (7.23) είναι αναγκαία για την ευστάθεια. Ας θεωρήσουμε ως σήμα εισόδου το $x(m,n) = \text{ sign } (h(m,n))$. Τότε θα έχουμε

$$|y(0,0)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{ sign } (h(m,n))h(m,n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(m,n)| < \infty.$$

Με βάση τον ορισμό της περιοχής σύγκλισης της Εξίσωσης (7.14), η ευστάθεια ενός συστήματος εξαρτάται από το εάν η περιοχή σύγκλισης για το μετασχηματισμό Z της κρουστικής απόκρισης του συστήματος περιλαμβάνει τους μοναδιαίους κύκλους $|z_1| = 1$ και $|z_2| = 1$. Είναι φανερό από τον ορισμό της ευστάθειας, ότι όλα τα φίλτρα με πεπερασμένη κρουστική απόκριση είναι ευσταθή. Ας θεωρήσουμε τώρα τα φίλτρα με άπειρη κρουστική απόκριση, που όμως περιορίζεται στο τέταρτο του επιπέδου, για τα οποία δίδεται μία αναδρομική σχέση ως ακολούθως

$$y(m,n) = \sum_{\substack{k=0 \\ |k|+|l|\neq 0}}^{K}\sum_{l=0}^{L} a(k,l)y(m-k,n-l) + x(m,n). \tag{7.24}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της μετατόπισης για το μετασχηματισμό Z που δίδεται στην Εξίσωση (7.19), προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι ίση με το αντίστροφο ενός πολυωνύμου των δύο μιγαδικών μεταβλητών z_1^{-1} και z_2^{-1},

$$H(z_1,z_2) = \frac{1}{A(z_1,z_2)} = \frac{1}{1 - \sum_{\substack{k=0 \\ |k|+|l|\neq 0}}^{K}\sum_{l=0}^{L} a(k,l)z_1^{-k}z_2^{-l}}. \tag{7.25}$$

Τότε η συνθήκη ευστάθειας μπορεί να εκφρασθεί με βάση τη θέση των ριζών του πολυωνύμου $A(z_1,z_2)$. Ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς που δίδεται από την Εξίσωση (7.25) είναι ευσταθές, εάν, και μόνο εάν,

$$A(z_1,z_2) \neq 0 \quad \text{για} \quad |z_1| \geq 1, |z_2| \geq 1 \tag{7.26}$$

εάν, και μόνο εάν,

$$\begin{array}{lll} A(z_1,z_2) \neq 0 & \text{για} & |z_1| \geq 1, |z_2| = 1 \\ A(z_1,z_2) \neq 0 & \text{για} & |z_1| = 1, |z_2| \geq 1 \end{array} \tag{7.27}$$

εάν, και μόνο εάν,

$$\begin{array}{lll} A(z_1,z_2) \neq 0 & \text{για} & |z_1| \geq 1, |z_2| = 1 \\ A(z_1,z_2) \neq 0 & \text{για} & z_1 = 1, |z_2| \geq 1 \end{array} \tag{7.28}$$

εάν, και μόνο εάν,

$$\begin{array}{lll} A(z_1,z_2) \neq 0 & \text{για} & |z_1| = |z_2| = 1 \\ A(z_1,1) \neq 0 & \text{για} & |z_1| \geq 1 \\ A(1,z_2) \neq 0 & \text{για} & |z_2| \geq 1 \end{array} \tag{7.29}$$

Παράδειγμα 7.6. Ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$A(z_1,z_2) = 1 - \alpha z_1^{-1} - \beta z_2^{-1} \tag{7.30}$$

Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας (7.27) γράφονται για την περίπτωση του παραδείγματος ως εξής

$$\begin{array}{ll} |\alpha| < |1 - \beta e^{-j\omega_2}| & \forall \omega_2 \\ |\beta| < |1 - \alpha e^{-j\omega_1}| & \forall \omega_1 \end{array} \tag{7.31}$$

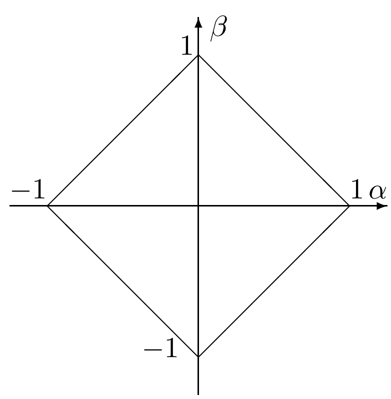
Από τις δύο αυτές ανισότητες προκύπτει ότι, αν το σύστημα είναι ευσταθές, θα πρέπει,

$$|\alpha \cos\omega_1 + \beta \cos\omega_2| < 1, \quad \forall \omega_1,\ \forall \omega_2 \tag{7.32}$$

Κατά συνέπεια, αν το σύστημα είναι ευσταθές θα έχουμε

$$|\alpha| + |\beta| < 1. \tag{7.33}$$

Αν αυτή η σχέση ισχύει μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι θα ισχύουν και οι σχέσεις (7.31), κι επομένως η σχέση (7.33) είναι ικανή και αναγκαία, για την ευστάθεια του συστήματος του παραδείγματος. Η συνθήκη αυτή δίδεται γραφικά στο Σχήμα 7.3. Το σύστημα είναι ευσταθές για τιμές των α και β στο εσωτερικό του τετραγώνου.



Σχήμα 7.3: Συνθήκη για ευστάθεια δισδιάστατης πρώτης τάξης αναδρομής.

Ασκήσεις

1. Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα προσδιορίστε εάν το σύστημα είναι ή όχι γραμμικό, είναι ή όχι αμετάβλητο κατά την μετατόπιση. Εάν το σύστημα είναι γραμμικό και αμετάβλητο κατά την μετατόπιση, βρείτε την κρουστική απόκρισή του.

    (a) $y(m,n) = x(m,n) + 1$

    (b) $y(m,n) = x(2m, 2n)$

    (c) $y(m,n) = \begin{cases} x(m/2, n/2) & m = 2k, n = 2l \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

    (d) $y(m,n) = (m^2 + n^2)x(m,n)$

    (e) $y(m,n) = \sum_{m'=-\infty}^{m} \sum_{n'=-\infty}^{n} x(m', n')$

    (f) $y(m,n) = \exp(2x(m,n))$

    (g) $y(m,n) = \sum_{m'=-1}^{1} \sum_{n'=-1}^{1} x(m', n')$

    (h) $y(m,n) = \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} x(m', n') \exp(-j\frac{2\pi m m'}{M}) \exp(-j\frac{2\pi n n'}{N})$

2. Δίδεται το ακόλουθο 2-Δ διακριτό σήμα

$$u(m,n) = \begin{cases} 1 & m \geq 0 \ \text{και} \ n \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

    και το ακόλουθο 2-Δ φίλτρο

$$h(m,n) = \begin{cases} -4 & m^2 + n^2 = 0 \\ 1 & m^2 + n^2 = 1 \\ 0 & m^2 + n^2 > 1 \end{cases}$$

    Να ευρεθεί η απόκριση του φίλτρου $h(m,n)$ στο σήμα $u(m,n)$. Να ευρεθεί επίσης ο μετασχηματισμός Z του $h(m,n)$.

3. Δίδεται το ακόλουθο δισδιάστατο φίλτρο με κρουστική απόκριση

$$h(m,n) = \begin{cases} \alpha^{-m+|n|} & m < 0, \forall n \\ 0 & m = 0, \forall n \\ -\alpha^{m+|n|} & m > 0, \forall n \end{cases}$$

    Ποιά είναι απόκριση του φίλτρου στα ακόλουθα σήματα:

    (a) $x(m,n) = 1, \forall m, n$

    (b) $x(m,n) = \begin{cases} 1 & m \geq 0, n \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

    Ποιά είναι η συνθήκη για το α ώστε να υπάρχουν αυτές οι αποκρίσεις; Πώς μπορεί να υλοποιηθεί αυτό το φίλτρο; Να δοθούν ο μετασχηματισμός Fourier και ο μετασχηματισμός Z του φίλτρου.

4. Εάν $X(z_1, z_2)$ είναι ο μετασχηματισμός Z της $x(m,n)$, και εάν $x(m,n) = x(-m,-n)$, να δειχθεί ότι $X(z_1, z_2) = X(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2})$.

5. Δίδεται η κρουστική απόκριση ενός 2-Δ συστήματος

$$h(m,n) = \begin{cases} \alpha^m & m \geq n \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Z της $h(m,n)$ και η περιοχή σύγκλισης. Ποιά είναι η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος;

6. Δίδεται

$$x(m,n) = y(a_{11}m + a_{12}n, a_{21}m + a_{22}n)$$

όπου για σημεία του σήματος $y(m,n)$ που δεν έχουν αντίστοιχο $x(m,n)$, λαμβάνεται η τιμή 0. Να αποδειχθεί ότι

$$Y(z_1,z_2) = X(z_1^{a_{11}} z_2^{a_{21}}, z_1^{a_{12}} z_2^{a_{22}}).$$

7. Ας υποτεθεί ότι τα διανύσματα (N_{11}, N_{12}) και (N_{21}, N_{22}) προσδιορίζουν τα όρια του τομέα όπου ορίζεται η κρουστική απόκριση ενός 2-Δ συστήματος, με άνοιγμα αυστηρά μικρότερο του π. Δίδεται ότι: $D = N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21} > 0$.

   (a) Να ευρεθεί ένας τρόπος γραμμικής απεικόνισης των σημείων του παραπάνω τομέα στο πρώτο τέταρτο του επιπέδου.

   (b) Αιτιολογείστε γιατί η συνθήκη ευστάθειας είναι ισοδύναμη για τις δύο περιπτώσεις πεδίου ορισμού.

   (c) Δίδεται ο μετασχηματισμός Z ενός 2-Δ συστήματος

   $$H(z_1,z_2) = \frac{1}{1 - az_1^{-1}z_2 - bz_2^{-1}}.$$

   Ποιά είναι η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος;

   (d) Ποιά είναι η συνθήκη ευστάθειας για ένα σύστημα οριζόμενο στο δεύτερο τέταρτο του επιπέδου $(m \geq 0, n \leq 0)$, αν

   $$H(z_1,z_2) = \frac{1}{A(z_1,z_2)}$$

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.