ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων

Ενότητα: Μαθηματική μορφολογία

Καθηγητής Γεώργιος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Κεφάλαιο 11

Μαθηματική μορφολογία

11.1 Μορφολογική επεξεργασία δυαδικών εικόνων

Η μαθηματική μορφολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση δυαδικών εικόνων, που προκύπτουν μετά από τμηματοποίηση εικόνων. Σε αυτή την περίπτωση οι πράξεις και οι τελεστές της μαθηματικής μορφολογίας μετασχηματίζουν τη μορφή ενός αντικειμένου ή εξάγουν κάποια χαρακτηριστικά της μορφής του αντικειμένου. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε συνοπτικά στους βασικούς μορφολογικούς τελεστές για δυαδικές εικόνες. Ένα αντικείμενο ορίζεται σαν ένα σύνολο σημείων, κι οι τελεστές που θα ορισθούν χρησιμοποιούν ένα αντικείμενο αντίστοιχο του επιδιωκόμενου στόχου, που ονομάζεται δομικό στοιχείο. Τελικά οι μορφολογικές πράξεις για δυαδικές εικόνες ορίζονται με τη βοήθεια των κλασικών πράξεων και σχέσεων μεταξύ συνόλων.

Δίδονται στη συνέχεια μερικοί από τους βασικότερους μορφολογικούς τελεστές.

- **Διάβρωση**

  Το αποτέλεσμα της διάβρωσης του αντικειμένου X από το στοιχείο B είναι το σύνολο

  $$X \ominus B = \{x : B_x \subset X\}, \tag{11.1}$$

  όπου B_x είναι το στοιχείο B μετατοπισμένο στη θέση x. Η διάβρωση είναι πράξη αναλλοίωτη στη μετατόπιση, είναι αύξουσα,

  $$\text{αν} \quad X \subset Y, \quad \text{τότε} \quad X \ominus B \subset Y \ominus B$$

  και συρρικνωτική,

  $$\text{αν} \quad (0,0) \in B, \quad \text{τότε} \quad X \ominus B \subset X$$

  Αν ένα αντικείμενο είναι μερικά γνωστό, τότε και το αποτέλεσμα της διάβρωσης είναι μερικά γνωστό

  $$(X \cap Z) \ominus B = (X \ominus B) \cap (Z \ominus B).$$

  Η διάβρωση διανέμεται στην ένωση δύο στοιχείων, κατά τον ακόλουθο τρόπο

  $$X \ominus (B \cup B') = (X \ominus B) \cap (X \ominus B').$$

- **Διαστολή**

  Το αποτέλεσμα της διαστολής του αντικειμένου X από το στοιχείο B είναι το σύνολο

  $$X \oplus B = \{x : B_x \cap X \neq \emptyset\}. \tag{11.2}$$

Η διαστολή είναι πράξη αναλλοίωτη στη μετατόπιση, είναι αύξουσα,

$$\text{αν} \;\; X \subset Y, \;\; \text{τότε} \;\; X \oplus B \subset Y \oplus B$$

και επεκτατική,

$$\text{αν} \;\; (0,0) \in B, \;\; \text{τότε} \;\; X \subset X \oplus B.$$

Η διαστολή διατηρεί τις συνδέσεις μεταξύ σημείων ενός αντικειμένου. Η διαστολή διανέμεται στην ένωση δύο στοιχείων, κατά τον ακόλουθο τρόπο

$$X \oplus (B \cup B') = (X \oplus B) \cup (X \oplus B').$$

Η επανάληψη της διαστολής είναι ισοδύναμη με τη διαστολή από ένα στοιχείο που προκύπτει από το αποτέλεσμα της διαστολής των δύο στοιχείων,

$$(X \oplus B) \oplus B' = X \oplus (B \oplus B').$$

Το ίδιο στοιχείο προσδιορίζει και το αποτέλεσμα της επανάληψης της διάβρωσης

$$(X \ominus B) \ominus B' = X \ominus (B \oplus B').$$

Οι πράξεις της διάβρωσης και της διαστολής είναι μεταξύ τους συμπληρωματικές, με την έννοια ότι

$$X \oplus B = (X^c \ominus \breve{B})^c,$$

όπου X^c είναι το συμπλήρωμα του συνόλου X, και $\breve{B}$ είναι το συμμετρικό του B ως προς το σημείο $(0,0)$.

Η διαστολή επιτρέπει την εύρεση των συνιστωσών ενός αντικειμένου, δηλαδή των υποσυνόλων του αντικειμένου που έχουν την ιδιότητα σύνδεσης των σημείων τους. Αν x είναι ένα σημείο του αντικειμένου X, η επαναληπτική εφαρμογή της διαστολής δίδει όλα τα συνδεόμενα με το x σημεία του αντικειμένου,

$$X_{i+1} = (X_i \oplus H) \cap X, \qquad X_1 = x$$

όπου το στοιχείο H εκφράζει την έννοια της σύνδεσης των σημείων (γειτονιά 4 ή 8 σημείων), και όπου οι επαναλήψεις σταματούν όταν επιτευχθεί σύγκλιση $(X_{i+1} = X_i)$.

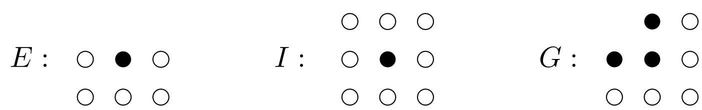
- **Εύρεση χαρακτηριστικών μορφών**
  Αυτή η μορφολογική πράξη ορίζεται με τη βοήθεια δύο δομικών στοιχείων, όπου το ένα, B^1, αφορά το αντικείμενο, και το άλλο, B^2, το συμπλήρωμά του. Αρκεί η πράξη της διάβρωσης για τον ορισμό του τελεστή εύρεσης χαρακτηριστικών μορφών

  $$X \circledast B = (X \ominus B^1) \cap (X^c \ominus B^2). \tag{11.3}$$

  Στο Σχήμα 11.1 δίδονται τα σύνθετα δομικά στοιχεία: E, για την αναζήτηση τερματικών σημείων ενός αντικειμένου, I, για την αναζήτηση μεμονωμένων σημείων, και G, για την αναζήτηση των γωνιών ενός αντικειμένου.

- **Άνοιγμα**
  Το άνοιγμα συνίσταται στη διάβρωση ενός αντικειμένου από ένα δομικό στοιχείο, B, ακολουθούμενη από τη διαστολή από το συμμετρικό του B,

  $$X_B = (X \ominus B) \oplus \breve{B}. \tag{11.4}$$



Σχήμα 11.1: Δομικά στοιχεία εύρεσης χαρακτηριστικών μορφών

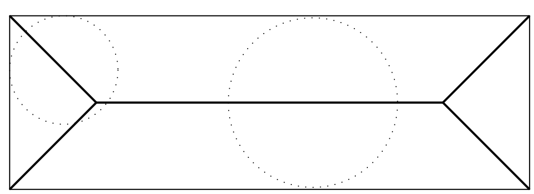
Το άνοιγμα είναι πράξη αναλλοίωτη στη μετατόπιση, αύξουσα, συρρικνωτική και αδύναμη, με την έννοια ότι η επανάληψη του ανοίγματος με το ίδιο στοιχείο δεν αλλάζει το αποτέλεσμα. Το άνοιγμα λειαίνει το περίγραμμα των αντικειμένων, κόβει στενούς ισθμούς και εξαφανίζει μικρά αντικείμενα.

- **Κλείσιμο**
  Το κλείσιμο ενός αντικειμένου συνίσταται στη διαστολή του από ένα δομικό στοιχείο, B, ακολουθούμενη από τη διάβρωση από το συμμετρικό του B,

$$X^B = (X \oplus B) \ominus \breve{B}. \tag{11.5}$$

  Το κλείσιμο είναι πράξη αναλλοίωτη στη μετατόπιση, αύξουσα, επεκτατική και αδύναμη. Το κλείσιμο εξαφανίζει μικρές οπές ενός αντικειμένου και φράσσει στενά κανάλια και λεπτούς κόλπους.

- **Σκελετός**
  Ο σκελετός ενός αντικειμένου μπορεί να ορισθεί ως το σύνολο των κέντρων όλων των κύκλων που εγγράφονται στο αντικείμενο και εφάπτονται σε δύο τουλάχιστον σημεία του περιγράμματός του (Σχήμα 11.2). Ο σκελετός μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τη



Σχήμα 11.2: Ο σκελετός ενός ορθογώνιου σχήματος

  διάβρωση και το άνοιγμα

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} s_n(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left((X \ominus nH) - (X \ominus nH)_H \right). \tag{11.6}$$

  Το δομικό στοιχείο H αποτελεί διακριτή παράσταση ενός μοναδιαίου δίσκου, ενώ ο δίσκος με μηδενική ακτίνα είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης της διάβρωσης, και δίσκοι με μεγαλύτερη ακτίνα μπορούν να ορισθούν προοδευτικά (Σχήμα 11.3). Με βάση τον παραπάνω ορισμό ο σκελετός δεν είναι κατ' ανάγκη ομοιοτοπικός του αντικειμένου, με την έννοια ότι δεν έχει τον ίδιο αριθμό τμημάτων και οπών όπως το αντικείμενο. Το αντικείμενο μπορεί να αποκατασταθεί από τα ενδιάμεσα αποτελέσματα της σκελετοποίησης με διαστολή

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(s_n(X) \oplus nH \right). \tag{11.7}$$

$$
0H: \quad \bullet \qquad 1H: \quad \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \end{array}
$$

Σχήμα 11.3: Δομικά στοιχεία παράστασης δίσκων ακτίνας 0 και 1

- **Λέπτυνση**
  Η λέπτυνση συνίσταται στην επαναληπτική αφαίρεση χαρακτηριστικών του αντικειμένου

  $$X \bigcirc B = X - X \circledast B. \tag{11.8}$$

  Αν B είναι δομικό στοιχείο 3×3, που ορίζει εσωτερικά σημεία με συνδέσεις 8 σημείων, τότε η λέπτυνση δίνει το σύνορο του αντικειμένου, με συνδέσεις γειτονιάς 4 σημείων. Ενώ το στοιχείο $B = 1H$ (Σχήμα 11.3) δίδει το σύνορο με συνδέσεις γειτονιάς 8 σημείων. Το στοιχείο $B = L$ (Σχήμα 11.4), μαζί με τα στοιχεία που προκύπτουν με περιστροφή απ' αυτό, δίδει ένα σκελετό ομοιοτοπικό του αντικειμένου.

- **Πάχυνση**
  Συμπληρωματική πράξη της λέπτυνσης είναι η πάχυνση

  $$X \odot B = X \cup (X \circledast B). \tag{11.9}$$

  Το στοιχείο $B = C$ (Σχήμα 11.4), μαζί με τα στοιχεία που προκύπτουν με περιστροφή απ' αυτό, δίδει ένα κυρτό περίγραμμα του αντικειμένου.

$$
L: \quad \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \qquad C: \quad \begin{array}{ccc} & & \\ \bullet & \circ & \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}
$$

Σχήμα 11.4: Δομικά στοιχεία ομοιοτοπικού σκελετού και κυρτού περιγράμματος

11.2 Μορφολογική επεξεργασία εικόνων φωτεινότητας

Στις εικόνες φωτεινότητας οι μορφολογικές πράξεις συνιστούν μη γραμμικά φίλτρα επεξεργασίας. Σε αυτή την περίπτωση το δομικό στοιχείο, $b(m,n)$, είναι μια υποεικόνα, μικρής συνήθως έκτασης, που προσδιορίζεται επί ενός συνόλου σημείων D_b. Για παράδειγμα μπορεί να είναι

$$b(m,n) = 1, D_b = \{(m,n) : m^2 + n^2 \leq 8\}.$$

Η τιμή θα μπορούσε να είναι και $b(m,n) = 0$ για όλα τα σημεία του εκάστοτε D_b.

- **Διάβρωση**
  Εάν $f(m,n)$ είναι οι τιμές της εικόνας η διάβρωση με το δομικό στοιχείο $b(m,n)$ δίδεται μέσω μιας ελάχιστης τιμής ως εξής

  $$(f \ominus b)(m,n) = \min\{f(m+k, n+l) - b(k,l) | (k,l) \in D_b\}, \tag{11.10}$$

  για όσα σημεία μπορεί να ορισθεί η τιμή $f(m+k, n+l)$. Οπότε αν το στοιχείο $b(m,n)$ λαμβάνει τη μηδενική τιμή η διάβρωση είναι απλά η ελάχιστη τιμή της αρχικής εικόνας σε μια γειτονιά που ορίζεται από το σύνολο D_b. Αν όλες οι τιμές του δομικού στοιχείου είναι μη αρνητικές, τότε η εικόνα γίνεται πιο σκούρα. Επίσης φωτεινά στίγματα, ανάλογα με το μέγεθός τους, περιορίζονται.

- **Διαστολή**
  Η διαστολή δίδεται μέσω της μέγιστης τιμής ως εξής

  $$(f \oplus b)(m,n) = \max\{f(m+k,n+l) + b(k,l) | (k,l) \in D_b\}, \tag{11.11}$$

  για όσα σημεία μπορεί να ορισθεί η τιμή $f(m+k,n+l)$. Σε αντίθεση με τη διάβρωση, αν όλες οι τιμές του δομικού στοιχείου είναι μη αρνητικές, τότε η εικόνα γίνεται πιο φωτεινή. Επίσης σκοτεινά στίγματα, ανάλογα με το μέγεθός τους, περιορίζονται. Η διαφορά διαστολής και διάβρωσης δίδει τη μορφολογική κλίση που εντοπίζει τις ακμές,

  $$g = (f \oplus b) - (f \ominus b). \tag{11.12}$$

  Στην απλούστερη περίπτωση θα είναι

  $$g(m,n) = \max\{f(m+k,n+l) | k^2+l^2 \leq 2\} - \min\{f(m+k,n+l) | k^2+l^2 \leq 2\}. \tag{11.13}$$

  Μπορεί επίσης να ορισθεί ο Laplacian τελεστής ως ακολούθως

  $$g(m,n) = \max\{f(m+k,n+l) | k^2+l^2 \leq 2\} + \min\{f(m+k,n+l) | k^2+l^2 \leq 2\} - 2f(m,n). \tag{11.14}$$

- **Άνοιγμα και κλείσιμο**
  Το άνοιγμα ορίζεται κατά τρόπο αντίστοιχο με την περίπτωση των δυαδικών εικόνων με χρήση ανοίγματος και κλεισίματος,

  $$f_b = (f \ominus b) \oplus \breve{b}, \tag{11.15}$$

  όπου το στοιχείο $\breve{b}$ αντιστοιχεί στο συμμετρικό του b ως προς την αρχή $(0,0)$. Παρόμοια ορίζεται το κλείσιμο

  $$f^b = (f \oplus b) \ominus \breve{b}. \tag{11.16}$$

  Το άνοιγμα λειαίνει τις κορυφές της φωτεινότητας, ενώ το κλείσιμο λειαίνει τις *χαράδρες*.

  Η διαδοχική χρήση του ανοίγματος και του κλεισίματος σε μια εικόνα οδηγεί σε εξομάλυνση των τιμών της εικόνας παρόμοια με αυτή που δίδει το φίλτρο μεσαίας τιμής. Ακριβέστερα ένα φίλτρο μεσαίας τιμής σε ένα δίσκο με ακτίνα διπλάσια αυτής του δομικού στοιχείου των μορφολογικών πράξεων δίδει παραπλήσιο αποτέλεσμα.

Σημειώματα

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης