



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

:

μ μ μ

Κεφάλαιο 12

Αποκατάσταση εικόνων

Πολλές φορές οι εικόνες κατά τη λήψη υφίστανται παραμόρφωση. Η επεξεργασία που σκοπεύει στον περιορισμό της παραμόρφωσης ονομάζεται αποκατάσταση. Πιθανές αιτίες παραμόρφωσης είναι η κίνηση κατά τη διάρκεια της λήψης της εικόνας, η κακή εστίαση, ή, στην περίπτωση δορυφορικών εικόνων, οι ατμοσφαιρικές διαταραχές.

Συχνά σα μοντέλο της παραμόρφωσης της αρχικής ιδανικής εικόνας, $f(x, y)$, χρησιμοποιείται ένα γραμμικό φίλτρο $h(x, y)$, στην έξοδο του οποίου προστίθεται θόρυβος

$$g(x, y) = \iint h(x - x', y - y') f(x', y') dx' dy' + w(x, y) \quad (12.1)$$

με $\iint h(x, y) dx dy = 1$, και θεωρώντας ότι η μέση τιμή του θορύβου, $w(x, y)$, είναι μηδέν και η διασπορά του σ^2 . Η χροστική απόκριση του φίλτρου ονομάζεται και συνάρτηση διασποράς σημείου. Παραδείγματα συναρτήσεων διασποράς σημείου δίδονται στη συνέχεια:

- Μετακίνηση στην κατεύθυνση θ κατά L

$$h(x, y) = \frac{1}{L} \Pi_1\left(\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{L}\right) \delta(-x \sin \theta + y \cos \theta)$$

με μετασχηματισμό Fourier,

$$H(u, v) = \text{sinc}(\pi L(u \cos \theta + v \sin \theta))$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης sinc δίδεται στο Σχήμα 4.3.

- Κακή εστίαση με ακτίνα r

$$h(x, y) = \frac{1}{\pi r^2}, \quad x^2 + y^2 \leq r^2$$

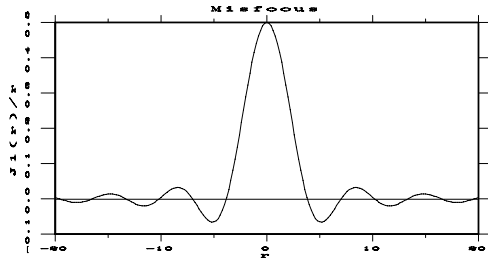
με μετασχηματισμό Fourier,

$$H(u, v) = \frac{\mathcal{J}_1(r\rho)}{r\rho}, \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

όπου $\mathcal{J}_1(\cdot)$ είναι μία συνάρτηση Bessel. Η $\frac{\mathcal{J}_1(r\rho)}{r\rho}$ δίδεται στο Σχήμα 12.1. Μια εικόνα με κακή εστίαση κατά τη λήψη δίδεται στο Σχήμα 12.2.

- Ατμοσφαιρικές διαταραχές διασποράς α^2

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\alpha^2}}$$



Σχήμα 12.1: Μετασχηματισμός Fourier της απόκρισης στην κακή εστίαση



Σχήμα 12.2: Κακά εστιασμένη εικόνα

με μετασχηματισμό Fourier,

$$H(u, v) = e^{-2\pi^2\alpha^2(u^2+v^2)}.$$

Σε διακριτή μορφή η εξίσωση που δίνει την παρατηρούμενη εικόνα είναι η εξής

$$g(m, n) = \sum_{m'} \sum_{n'} h(m - m', n - n') f(m', n') + w(m, n), \quad (12.2)$$

που μπορεί να γραφεί, θεωρώντας τα διανύσματα f και g που κατασκευάζονται από τις τιμές των $f(.,.)$ και $g(.,.)$ αντίστοιχα,

$$g = Hf + w, \quad (12.3)$$

όπου ο πίνακας H κατασκευάζεται από τα δείγματα της συνάρτησης διασποράς σημείου $h(.,.)$. Η αποκατάσταση συνίσταται στην αντιστροφή του γνωστού τελεστή H της παραπάνω σχέσης για την εύρεση του f από το παρατηρούμενο g . Ο πίνακας H όπως έχει ορισθεί ανωτέρω είναι μπλοκ Toeplitz. Αυτό σημαίνει ότι συνίσταται από πίνακες Toeplitz με την ιδιότητα της εξάρτησης των στοιχείων τους μόνο από τη διαφορά των δεικτών. Χωρίς καμία αλλοίωση των παραπάνω εξισώσεων, και επεκτείνοντας κατάλληλα τους πίνακες με μηδενικά, προκύπτουν πίνακες κυκλικοί, ενώ ο πίνακας H μετατρέπεται σε μπλοκ κυκλικό. Η δομή του πίνακα H έχει ως εξής, αν $N^2 \times N^2$ είναι η διάσταση του πίνακα,

$$H = \begin{bmatrix} H(0) & H(N-1) & \dots & H(1) \\ H(1) & H(0) & \dots & H(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H(N-1) & H(N-2) & \dots & H(0) \end{bmatrix},$$

όπου οι πίνακες $H(m)$ έχουν τη μορφή

$$H(m) = \begin{bmatrix} h(m, 0) & h(m, N-1) & \cdots & h(m, 1) \\ h(m, 1) & h(m, 0) & \cdots & h(m, 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(m, N-1) & h(m, N-2) & \cdots & h(m, 0) \end{bmatrix}.$$

Η αλλαγή αυτή είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα γιατί επιτρέπει τη χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier για τη λύση του προβλήματος αποκατάστασης.

Δίδονται στη συνέχεια λύσεις του αντίστροφου προβλήματος για την αποκατάσταση των εικόνων.

12.1 Αντίστροφο φίλτρο

Το αντίστροφο φίλτρο $h^{(-1)}$ ορίζεται ως ακολούθως

$$\sum_{m'} \sum_{n'} h^{(-1)}(m-m', n-n') h(m', n') = \delta(m, n) \quad (12.4)$$

και για τις αποκρίσεις στις συχνότητες

$$H^{(-1)}(u, v) H(u, v) = 1 \quad (12.5)$$

Οπότε έχοντας μετατρέψει τους αντίστοιχους πίνακες σε κυκλικούς η λύση μπορεί να δοθεί μέσω του διακριτού μετασχηματισμού Fourier

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}. \quad (12.6)$$

Με δοσμένο ότι για κάποιες συχνότητες μπορεί η απόκριση $H(u, v)$ να μηδενίζεται τίθεται κατ' αρχήν ένα θέμα ύπαρξης για το αντίστροφο φίλτρο, κι οπωσδήποτε ένα ζήτημα ευστάθειας, με την έννοια της αντοχής στο θόρυβο. Εφόσον το αντίστροφο φίλτρο υπάρχει, η προσδοκητή τιμή της αντιστροφής της παρατήρησης αποκαθιστά τέλεια την εικόνα, με πολλαπλασιασμένη όμως τη διασπορά του θορύβου στις υψηλές συχνότητες. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να περιορισθεί με τη χρήση ενός βαθυπερατού φίλτρου, που όμως θα μειώσει την ευκρίνεια της εικόνας.

12.2 Ψευδο-αντίστροφο φίλτρο

Η αντιστροφή του πίνακα H (12.3) προϋποθέτει ότι είναι τετραγωνικός. Πολύ συχνά η διάσταση της παρατηρούμενης εικόνας είναι μεγαλύτερη από αυτή της αποκαθιστόμενης. Τότε η αντιστροφή ζητείται με την έννοια της ελαχιστοποίησης της απόστασης $\|Hf - g\|^2$. Εάν ο πίνακας $H^T H$ είναι αντιστρέψιμος, η λύση είναι

$$\hat{f} = (H^T H)^{-1} H^T g \quad (12.7)$$

και, εάν χρησιμοποιηθεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier,

$$\hat{F}(u, v) = \frac{H^*(u, v) G(u, v)}{|H(u, v)|^2}, \quad H(u, v) \neq 0. \quad (12.8)$$

Ωστόσο το πρόβλημα σχετικά με την ευστάθεια παραμένει. Η χρήση ενός επαναληπτικού αλγόριθμου επιτρέπει την εύρεση της λύσης χωρίς την άμεση αντιστροφή του πίνακα $H^T H$,

και ταυτόχρονα δίδει ένα τρόπο για την αντιμετώπιση του ζητήματος της ευστάθειας. Σε Παραρτήματα δίδονται δύο επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης με κατάβαση στην κατεύθυνση της κλίσης η μία, και της συζυγούς κλίσης η άλλη. Η πρώτη δεν απαιτεί διαιρέσεις και είναι πιο αργή από τη δεύτερη. Και στις δύο περιπτώσεις κάθε νέα επανάληψη βελτιώνει την αποκαθιστόμενη εικόνα, αυξάνοντας όμως ταυτόχρονα το θόρυβο. Η βέλτιστη συνολικά λύση προκύπτει όταν οι επαναλήψεις τερματισθούν πριν την τέλεια αντιστροφή του πίνακα $H^T H$.

12.3 Γενικευμένη αντιστροφή

Στην περίπτωση που ο πίνακας $H^T H$ δεν είναι αντιστρέψιμος, μπορεί να ζητηθεί η λύση της οποίας το μέτρο είναι ελάχιστο. Αναφερόμαστε τότε στη γενικευμένη αντιστροφή, που συμβολίζεται ως εξής

$$f^\# = H^\# g.$$

Ο γενικευμένος αντίστροφος ικανοποιεί τις συνθήκες Moore-Penrose

$$\begin{aligned} H H^\# H &= H \\ H^\# H H^\# &= H^\# \\ (H H^\#)^T &= H H^\# \\ (H^\# H)^T &= H^\# H \end{aligned}$$

Ο γενικευμένος αντίστροφος μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια των ιδιζουσών τιμών και των αντίστοιχων διανυσμάτων του πίνακα H . Ας είναι

$$H = U \Lambda V^T, \text{ με } U^T U = \mathbf{I} \text{ και } V^T V = \mathbf{I}$$

όπου ο πίνακας Λ περιλαμβάνει τις ιδιάζουσες τιμές του H : $\{\lambda_1, \dots, \lambda_R\}$. Θα ισχύει τότε

$$H^\# = \sum_{r=1}^R \frac{1}{\lambda_r} v_r u_r^T,$$

όπου u_r (αντίστοιχα v_r) είναι οι στήλες του U (αντίστοιχα V). Η λύση είναι

$$f^\# = \sum_{r=1}^R \frac{1}{\lambda_r} \langle g, u_r \rangle v_r.$$

Το πρόβλημα της αστάθειας παραμένει, κι αντιμετωπίζεται αγνοώντας στο παραπάνω άθροισμα τους όρους με χαμηλές ιδιάζουσες τιμές.

12.4 Εξομάλυνση

Ένα αντίστροφο πρόβλημα θεωρείται ότι έχει τεθεί κάτω από καλές συνθήκες, εάν υπάρχει λύση, και μία μόνη, κι επιπλέον αυτή η λύση είναι σταθερή. Η μέθοδος της εξομάλυνσης μετατρέπει ένα πρόβλημα που τίθεται κάτω από δυσμενείς όρους σ' ένα πρόβλημα που μπορεί να λυθεί κάτω από καλές συνθήκες. Προς τούτο προστίθεται μία συνθήκη ευστάθειας στο κριτήριο ελαχιστοποίησης που εκφράζει το αντίστροφο πρόβλημα. Κατάλληλες τέτοιες συνθήκες ευστάθειας ορίζονται με τη βοήθεια των τελεστών παραγωγίσης. Η χρήση των πρώτων μερικών παραγώγων δίδει την ακόλουθη λύση

$$\hat{f} = (H^T H + \mu(D_x^T D_x + D_y^T D_y))^{-1} H^T g.$$

Η παράμετρος μ ονομάζεται συντελεστής εξομάλυνσης. Η χρήση του λαπλασιανού τελεστή δίδει την εξής λύση

$$\hat{f} = (H^T H + \mu L^T L)^{-1} H^T g.$$

Η επίλυση μπορεί να γίνει με μία από τις επαναληπτικές μεθόδους που δίδονται στα Παραρτήματα, ή με χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.

Εάν είναι γνωστά τα φάσματα ισχύος τόσο της αρχικής εικόνας ($P_f(u, v)$), όσο και του θορύβου ($P_w(u, v)$), τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσαρμογή της εξομάλυνσης, δίδοντας το φίλτρο Wiener

$$\hat{F}(u, v) = \frac{P_f(u, v) H^*(u, v) G(u, v)}{P_f(u, v) |H(u, v)|^2 + P_w(u, v)}.$$

12.5 Παραρτήματα

12.5.1 Κατάβαση στην κατεύθυνση της κλίσης

Κατά την επανάληψη $k + 1$ η λύση δίδεται από την εξίσωση

$$\hat{f}^{(k+1)} = \hat{f}^{(k)} - \beta H^T (H \hat{f}^{(k)} - g)$$

με $\hat{f}^{(0)} = \beta H^T g$. Η επαναληπτική αυτή σχέση δίδει

$$\hat{f}^{(k)} = \beta \sum_{l=0}^k (\mathbf{I} - \beta H^T H)^l H^T g$$

και συγκλίνει με την προϋπόθεση ότι

$$0 < \beta < \frac{2}{\lambda_{max}^2},$$

όπου λ_{max}^2 είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα $H^T H$.

12.5.2 Αλγόριθμος των συζυγών κλίσεων

Για απλοποίηση θέτουμε: $Q = H^T H$ και $b = H^T g$. Ο πίνακας Q είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, διαστάσεων $K \times K$. Δύο διανύσματα d_1 και d_2 ονομάζονται Q -ορθογώνια, αν $d_1^T Q d_2 = 0$. Το σύνολο K Q -ορθογώνιων διανυσμάτων αποτελεί μία πλήρη βάση στο χώρο K διαστάσεων. Θα είναι επομένως

$$f = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k d_k.$$

Ο αλγόριθμος των συζυγών κλίσεων κατασκευάζει ταυτόχρονα τις συζυγείς κλίσεις και τη λύση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων, και συγκλίνει σε K ακριβώς βήματα. Για μια οποιαδήποτε αρχική λύση $\hat{f}^{(0)}$, υπολογίζεται η κλίση $d_0 = b - Q \hat{f}^{(0)}$. Για $k = 0, \dots, K - 1$, υπολογίζεται η νέα λύση του συστήματος με μία διόρθωση στην κατεύθυνση της κλίσης

$$\hat{f}^{(k+1)} = \hat{f}^{(k)} + \alpha_k d_k,$$

όπου $\alpha_k = \frac{(b - Q \hat{f}^{(k)})^T d_k}{d_k^T Q d_k}$. Η νέα κλίση, Q -ορθογώνια στις προηγούμενες, θα είναι

$$d_{k+1} = b - Q \hat{f}^{(k+1)} + \beta_k d_k,$$

όπου $\beta_k = \frac{(Q \hat{f}^{(k+1)} - b)^T Q d_k}{d_k^T Q d_k}$.

μ μ

μ μ

Copyright μ , « μ : 1.0. 2015. μ : <http://www.csd.uoc.gr/~hy471/>

μ μ

μ μ Creative Commons , 4.0 [1] μ , μ μ « μ μ ».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

μ :

- μ μ μ μ μ ,
- μ μ
- μ μ μ μ (. . .

μ μ , . μ

μ μ

μ μ :

- μ μ
- μ μ
- μ μ
- μ μ (. . .)

μ μ μ μ .

