ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων

Ενότητα: Ανάλυση σε ζώνες συχνοτήτων

Καθηγητής Γεώργιος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Κεφάλαιο 14

Ανάλυση σε ζώνες συχνοτήτων

Με την ανάλυση η εικόνα διαχωρίζεται σε μικρότερες εικόνες που η καθεμία αντιστοιχεί σε μία διαφορετική ζώνη συχνοτήτων. Επειδή κατά κανόνα για τα 2-Δ σήματα χρησιμοποιούνται διαχωρίσιμα φίλτρα για την ανάλυση, είναι αρκετό να αναπτύξουμε το ζήτημα για 1-Δ σήματα.

Ας ξεκινήσουμε με κάποιους χρήσιμους ορισμούς. Ονομάζεται αποδεκατισμός τάξης p (όπου $p > 1$ φυσικός αριθμός) η περιοδική δειγματοληψία ενός από κάθε p δείγματα ενός σήματος. Το αποδεκατισμένο σήμα που προκύπτει από το σήμα $x(n)$ είναι

$$y(n) = x(pn) \tag{14.1}$$

Ας ονομάσουμε $X(z)$ (αντίστοιχα $Y(z)$) το μετασχηματισμό Z του $x(n)$ (αντίστοιχα $y(n)$). Η σχέση μεταξύ των δύο μετασχηματισμών Z προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(pn) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^{-n}}{2\pi j} \oint X(\zeta)\zeta^{pn-1} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint X(\zeta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta^p}\right)^n \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(\zeta) \frac{\zeta^{p-1}}{\zeta^p - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint X(\zeta) \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\zeta - (ze^{-j2\pi k})^{1/p}} d\zeta \\
&= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} X(z^{1/p} e^{-\frac{j2\pi k}{p}})
\end{aligned} \tag{14.2}$$

Απ΄ αυτή τη σχέση μπορεί να εξαχθεί επίσης η σχέση μεταξύ των δύο μετασχηματισμών Fourier

$$\mathcal{Y}(u) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \mathcal{X}\left(\frac{u-k}{p}\right) \tag{14.3}$$

Είναι φανερό ότι με τον αποδεκατισμό δημιουργείται ένα πρόβλημα ψευδώνυμων συχνοτήτων. Το φαινόμενο αυτό δεν είναι επιθυμητό, αντίθετα επιζητείται ο περιορισμός του αποδεκατισμένου σήματος σε μια ζώνη συχνοτήτων εύρους $1/p$. Γι΄ αυτό απαιτείται η χρήση ενός βαθυπερατού φίλτρου πριν τον αποδεκατισμό. Το ιδανικό φίλτρο, εάν υπήρχε, θα είχε την ακόλουθη απόκριση στις συχνότητες

$$\mathcal{H}(u) = \begin{cases} 1 & |u| \leq \frac{1}{2p} \\ 0 & \frac{1}{2p} < |u| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{14.4}$$

Στην πράξη για ένα οποιοδήποτε φίλτρο και μετά τον αποδεκατισμό θα ομιλούμε για προσέγγιση του σήματος σε κλίμακα $1/p$ και θα έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$x_a(n:p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(pn-k)x(k) \tag{14.5}$$

$$X_a(z:p) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} H(z^{1/p}e^{-\frac{j2\pi k}{p}})X(z^{1/p}e^{-\frac{j2\pi k}{p}}) \tag{14.6}$$

$$\mathcal{X}_a(z:p) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathcal{H}(\frac{u-k}{p})\mathcal{X}(\frac{u-k}{p}) \tag{14.7}$$

Στην αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με τον αποδεκατισμό ευρίσκεται η παρεμβολή δειγμάτων με μηδενική τιμή για την επέκταση του σήματος κατά ένα παράγοντα p. Το σήμα που προκύπτει είναι το ακόλουθο

$$y(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{p}) & n\%p = 0 \\ 0 & n\%p \neq 0 \end{cases} \tag{14.8}$$

όπου $n\%p$ δηλώνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του n δια p. Αποδεικνύεται εύκολα ότι μεταξύ των μετασχηματισμών Z και Fourier ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$Y(z) = X(z^p) \tag{14.9}$$

$$\mathcal{Y}(u) = \mathcal{X}(pu) \tag{14.10}$$

Η σταθμισμένη παρεμβολή $p-1$ τιμών μεταξύ δύο τιμών του αρχικού σήματος $x(n)$ προκύπτει με τη χρήση ενός βαθυπερατού φίλτρου μετά την παρεμβολή των μηδενικών τιμών. Οπότε θα έχουμε

$$x_i(n:p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(n-pl)x(l) \tag{14.11}$$

Μεταξύ των μετασχηματισμών Z και Fourier ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$X_i(z:p) = H(z)X(z^p) \tag{14.12}$$

$$\mathcal{X}_i(u:p) = \mathcal{H}(u)\mathcal{X}(pu) \tag{14.13}$$

Στη συνέχεια θα περιορισθούμε μόνο στην περίπτωση της ανάλυσης σε δύο ζώνες συχνοτήτων ($p=2$) με βάση τους παραπάνω ορισμούς. Η προσέγγιση του σήματος σε κλίμακα $1/2$ αντιστοιχεί στη ζώνη χαμηλών συχνοτήτων. Συνήθως το φίλτρο $h(n)$ επιλέγεται ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)$$

Με παρόμοιο τρόπο και στην ίδια κλίμακα μπορούν να εξαχθούν οι λεπτομέρειες του σήματος που αντιστοιχούν στις υψηλές συχνότητες

$$x_d(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(2n-k)x(k) \tag{14.14}$$

Οπότε θα έχουμε, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (14.6)

$$X_d(z) = \frac{1}{2}\left(G(z^{1/2})X(z^{1/2}) + G(-z^{1/2})X(-z^{1/2})\right) \tag{14.15}$$

Το φίλτρο για την εξαγωγή των υψηλών συχνοτήτων επιλέγεται με βάση το βαθυπερατό φίλτρο που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση. Συνήθης επιλογή είναι η ακόλουθη

$$\mathcal{G}(u) = e^{-j2\pi u}\mathcal{H}^*(u - \frac{1}{2}) \tag{14.16}$$

$$G(z) = z^{-1}H(-\frac{1}{z}) \tag{14.17}$$

$$g(n) = (-1)^{1-n}h(1-n) \tag{14.18}$$

Από την προσέγγιση και από τις λεπτομέρειες του σήματος, ακόμα κι αν το φίλτρο h δεν είναι ιδανικό μπορεί να αποκατασταθεί τέλεια το αρχικό σήμα αρκεί να χρησιμοποιηθεί σταθμισμένη παρεμβολή με το φίλτρο $H(\frac{1}{z})$ για τις χαμηλές συχνότητες και με το $G(\frac{1}{z})$ για τις υψηλές συχνότητες, και τα δύο προκύπτοντα σήματα να προστεθούν. Ας είναι $\hat{X}(z)$ ο μετασχηματισμός Z που προκύπτει μάυτό τον τρόπο. Θα έχουμε

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}\left(H(z)X(z) + H(-z)X(-z)\right)H(\frac{1}{z}) + \frac{1}{2}\left(G(z)X(z) + G(-z)X(-z)\right)G(\frac{1}{z})$$
$$= \frac{1}{2}\left(H(z)H(\frac{1}{z}) + H(-z)H(-\frac{1}{z})\right)X(z) + \frac{1}{2}\left(H(-z)H(\frac{1}{z}) - H(\frac{1}{z})H(-z)\right)X(-z)$$

Αν επομένως $H(z)H(\frac{1}{z}) + H(-z)H(-\frac{1}{z}) = 2$, τότε $\hat{X}(z) = X(z)$. Η παραπάνω συνθήκη είναι ισοδύναμη με

$$|\mathcal{H}(u)|^2 + |\mathcal{H}(u - \frac{1}{2})|^2 = 2 \tag{14.19}$$

Επιπλέον μεταξύ των φίλτρων H και G απαιτείται μία σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}(u)\mathcal{G}^*(u)du = 0$$

Φίλτρα που επαληθεύουν αυτές τις σχέσεις ανήκουν στην κατηγορία των συζυγών ορθογώνιων φίλτρων.

Ενα ζεύγος φίλτρων που ικανοποιεί όλες τις παραπάνω απαιτήσεις είναι το ακόλουθο

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1}) \quad \text{και} \quad G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + z^{-1})$$

που όμως έχει πτωχές επιδόσεις ως προς την ανάλυση σε ζώνες συχνοτήτων. Κατά κανόνα χρησιμοποιούνται φίλτρα με πεπερασμένη, αλλά μεγαλύτερη σε έκταση, κρουστική απόκριση, που ικανοποιούν προσεγγιστικά τις παραπάνω απαιτήσεις. Τέτοια παραδείγματα φίλτρων δίδονται στον Πίνακα 14.1.

Στην περίπτωση 2-Δ σημάτων τα χρησιμοποιούμενα 2-Δ φίλτρα προκύπτουν με βάση την αρχή της διαχωρισιμότητας. Ετσι για ανάλυση σε τέσσερεις ζώνες συχνοτήτων χρησιμοποιούνται τα εξής φίλτρα

$$h_{LL}(m,n) = h(m)h(n)$$
$$h_{LH}(m,n) = h(m)g(n)$$
$$h_{HL}(m,n) = g(m)h(n)$$
$$h_{HH}(m,n) = g(m)g(n)$$

Η ανάλυση μπορεί να επαναληφθεί για οποιαδήποτε από τις ζώνες συχνοτήτων, αλλά κυρίως έχει ενδιαφέρον η περαιτέρω ανάλυση της ζώνης χαμηλών συχνοτήτων για προσέγγιση σε μικρότερη κλίμακα. Συνολικά το 2-Δ σήμα μπορεί να αναλυθεί σε K σήματα I_k, με διαφορετική έκταση το καθένα στη γενική περίπτωση.

n	$h_4(n)$	$h_6(n)$	$h_8(n)$	$h_{10}(n)$	$h_{12}(n)$
0	.483	.333	.230	.160	.112
1	.837	.807	.715	.604	.495
2	.224	.460	.631	.724	.751
3	−.129	−.135	−.028	.138	.315
4		−.085	−.187	−.242	−.226
5		.035	.031	−.032	−.130
6			.033	.078	.098
7			−.011	−.006	.028
8				−.013	−.032
9				.003	.001
10					.005
11					−.001

Πίνακας 14.1: Φίλτρα προσέγγισης σε κλίμακα 1/2

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.