ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων

Ενότητα: 2-Δ δειγματοληψία

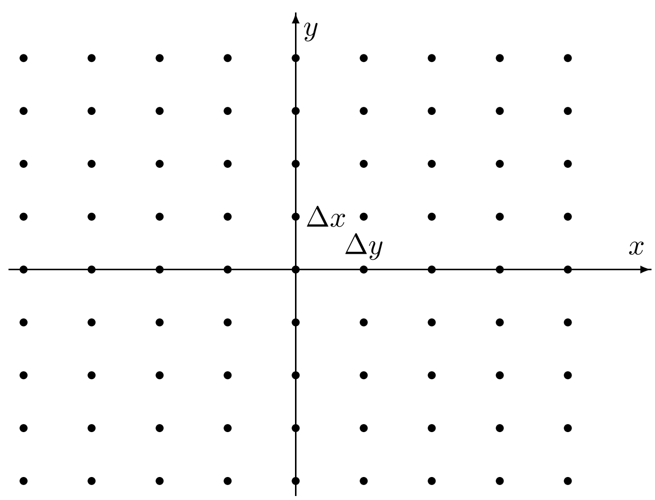
Καθηγητής Γεώργιος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Κεφάλαιο 4

2-Δ δειγματοληψία

Έστω ένα 2-Δ ορθογώνιο πλέγμα σημείων περιοδικά διαταγμένων στο επίπεδο των πραγματικών αριθμών (Σχήμα 4.1). Το πλέγμα αυτό δίδει τα σημεία όπου θα ληφθούν δείγματα από το 2-Δ συνεχές σήμα. Ας είναι Δx (αντίστοιχα Δy) η περίοδος της δειγματοληψίας ως πρός x (αντίστοιχα y). Με βάση την ιδιότητα της κατανομής Dirac, που δίδεται στην Εξίσωση (3.6),



Σχήμα 4.1: 2-Δ ορθογώνιο πλέγμα σημείων

για εξαγωγή δειγμάτων από ένα 2-Δ σήμα, ορίζεται η 'συνάρτηση' δειγματοληψίας

$$s(x,y) = \Delta x \Delta y \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y). \tag{4.1}$$

Το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας του σήματος $f(x,y)$ είναι το γινόμενο αυτού του σήματος με τη 'συνάρτηση' δειγματοληψίας

$$f_s(x,y) = s(x,y) f(x,y), \tag{4.2}$$

που δίδει

$$f_s(x,y) = \Delta x \Delta y \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta x, n\Delta y) \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y). \tag{4.3}$$

Η δειγματοληψία συνεπάγεται περιοδικοποίηση στο πεδίο των συχνοτήτων. Πράγματι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $f_s(x,y)$ προκύπτει από τη συνέλιξη του $F(u,v)$ με το $S(u,v)$, το μετασχηματισμό Fourier της $s(x,y)$. Επειδή η $s(x,y)$ είναι περιοδική συνάρτηση, μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια μιας σειράς Fourier, που είναι η ακόλουθη

$$s(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(m\frac{x}{\Delta x}+n\frac{y}{\Delta y})}. \tag{4.4}$$

Πράγματι οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι ίσοι με τη μονάδα

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2}\int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} s(x,y)e^{-j2\pi(m\frac{x}{\Delta x}+n\frac{y}{\Delta y})}dxdy = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2}\int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \delta(x,y)e^{-j2\pi(m\frac{x}{\Delta x}+n\frac{y}{\Delta y})}dxdy = 1.$$

Στηριζόμενοι τώρα στην Εξίσωση (3.15), βρίσκουμε

$$S(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u-\frac{m}{\Delta x}, v-\frac{n}{\Delta y}). \tag{4.5}$$

Επομένως το αποτέλεσμα της συνέλιξης, με βάση και την Εξίσωση (3.6), είναι

$$F_s(u,v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(u-\frac{m}{\Delta x}, v-\frac{n}{\Delta y}). \tag{4.6}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι προφανώς περιοδική, με περίοδο τη συχνότητα δειγματοληψίας $\nu_x = \frac{1}{\Delta x}$ (αντίστοιχα $\nu_y = \frac{1}{\Delta y}$) για τη συχνότητα u (αντίστοιχα v).

Στο ζήτημα αν είναι δυνατό να ανακατασκευασθεί το συνεχές σήμα από τα περιοδικά του δείγματα όπως ορίσθηκαν προηγούμενα απαντά το θεώρημα της δειγματοληψίας.

Θεώρημα της 2-Δ δειγματοληψίας

Αν το σήμα $f(x,y)$ είναι πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων, δηλαδή, αν

$$F(u,v) = 0, |u| > u_M, |v| > v_M, \tag{4.7}$$

τότε αρκεί οι συχνότητες δειγματοληψίας να είναι τουλάχιστον ίσες με τις συχνότητες Nyquist,

$$\nu_x \geq 2u_M, \nu_y \geq 2v_M, \tag{4.8}$$

για να μπορεί να αποκατασταθεί τέλεια το συνεχές σήμα από το διακριτό που δίδει η δειγματοληψία.

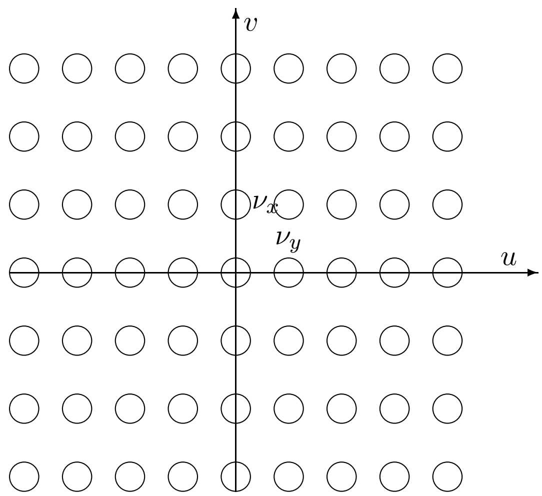
Στο Σχήμα 4.2 φαίνεται η περιοδικοποίηση λόγω δειγματοληψίας στο επίπεδο των συχνοτήτων, σε συνθήκες ισχύος του θεωρήματος της δειγματοληψίας. Ο κύκλος που περιβάλλει την αρχή των αξόνων αντιστοιχεί στο χωρίο όπου εκτείνεται με μη μηδενικές τιμές ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος.

Η ανακατασκευή του συνεχούς σήματος επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας ένα φίλτρο που δίδει τέλεια την κύρια περίοδο του $F_s(u,v)$

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & |u| \leq \frac{\nu_x}{2} \quad \text{και} \quad |v| \leq \frac{\nu_y}{2} \\ 0, & |u| > \frac{\nu_x}{2} \quad \text{είτε} \quad |v| > \frac{\nu_y}{2} \end{cases} \tag{4.9}$$

Προφανώς έχουμε

$$F(u,v) = H(u,v)F_s(u,v). \tag{4.10}$$



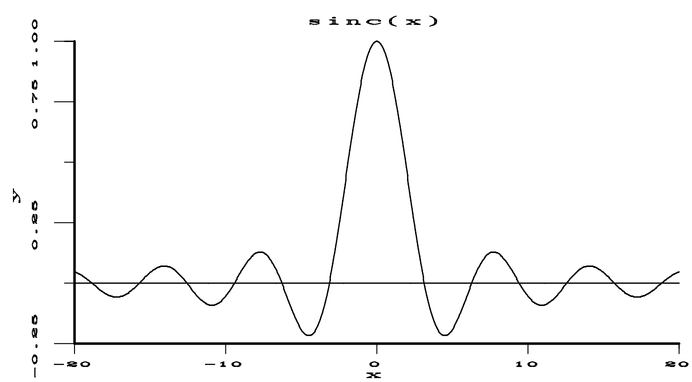
Σχήμα 4.2: Η περιοδικοποίηση στο επίπεδο Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $H(u, v)$ είναι (βλέπε Εξίσωση (3.16))

$$h(x,y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\mathrm{sinc}\frac{\pi x}{\Delta x}\mathrm{sinc}\frac{\pi y}{\Delta y}, \tag{4.11}$$

όπου $\mathrm{sinc}x = \frac{\sin x}{x}$ (Σχήμα 4.3). Οπότε η παρεμβολή για οποιαδήποτε τιμή των x και y δίδεται από την ακόλουθη συνέλιξη

$$f(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta x, n\Delta y)\mathrm{sinc}\frac{\pi(x - m\Delta x)}{\Delta x}\mathrm{sinc}\frac{\pi(y - m\Delta y)}{\Delta y}. \tag{4.12}$$



Σχήμα 4.3: Συνάρτηση sinc

Αν οι συχνότητες δειγματοληψίας είναι κάτω από τις συχνότητες Nyquist, τότε προκύπτουν επικαλύψεις στο φάσμα των συχνοτήτων, μ΄ αποτέλεσμα να είναι αδύνατο να ανακτηθεί τέλεια το συνεχές σήμα. Οι συχνότητες που λόγω επικάλυψης αλλάζουν θέση ονομάζονται ψευδώνυμες, και εισάγουν παραμόρφωση στο συνεχές σήμα. Συνεπώς οι Εξισώσεις (4.10) και (4.12) δεν ισχύουν. Για τον περιορισμό αυτής της παραμόρφωσης συνιστάται η χρήση του φίλτρου $H(u, v)$ πριν τη δειγματοληψία.

Παραμόρφωση μπορεί επίσης να εισαχθεί, έστω κι αν ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος της δειγματοληψίας, αν το φίλτρο της παρεμβολής δεν είναι ιδανικό. Αν δηλαδή δεν χρησιμοποιηθεί το φίλτρο της Εξίσωσης (4.11), που δεν είναι πρακτικά υλοποιήσιμο, αλλά κάποιο άλλο που να το προσεγγίζει, έχοντας για παράδειγμα πεπερασμένη απόκριση στο χώρο. Τέτοια φίλτρα παρεμβολής είναι τα ακόλουθα:

- $h_0(x,y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\Pi_2(\frac{x}{\Delta x}, \frac{y}{\Delta y})$
- $h_1(x,y) = h_0(x,y) * h_0(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(1 - \frac{|x|}{\Delta x}\right)\left(1 - \frac{|y|}{\Delta y}\right), & |x| < \Delta x \quad \text{και} \quad |y| < \Delta y \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$
- $h_2(x,y) = h_1(x,y) * h_0(x,y)$

Στο Σχήμα 4.4 δείχνεται η διεργασία της δειγματοληψίας και ο ρόλος του βαθυπερατού φίλτρου. Εδώ η αρχική εικόνα είναι επίσης ορισμένη πάνω σε ένα διακριτό πλέγμα, και υφίσταται υποδειγματοληψία με ρυθμό 1/4, δηλαδή λαμβάνοντας ένα στα τέσσερα δείγματα τόσο στην οριζόντια, όσο και στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Δείχνεται το αποτέλεσμα όταν προηγείται της δειγματοληψίας η χρήση βαθυπερατού φίλτρου, που φυσικά δεν είναι το ιδανικό. Αν δεν χρησιμοποιηθεί το φίλτρο, παρατηρείται η εμφάνιση ψευδώνυμων συχνοτήτων, που βέβαια δεν διορθώνονται, αν το βαθυπερατό φίλτρο ακολουθήσει τη δειγματοληψία.

Άσκηση

Το 2-Δ σήμα $f(x,y) = \cos 4\pi x \cos 6\pi y$ υφίσταται δειγματοληψία με $\Delta x = \Delta y = 0,5$, και με $\Delta x = \Delta y = 0,2$. Το φίλτρο ανακατασκευής είναι ένα ιδεατό βαθυπερατό φίλτρο με εύρη ζώνης $(\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{2\Delta y})$. Ποία είναι η ανακατασκευαζόμενη εικόνα σε κάθε περίπτωση;

(a)

(b)

(c)

(d)

Σχήμα 4.4: Ανω αριστερά : εικόνα "Barbara". Ανω δεξιά : χρήση βαθυπερατού φίλτρου και μετά δειγματοληψία. Κάτω αριστερά : δειγματοληψία χωρίς να προηγηθεί φίλτρο. Κάτω δεξιά : δειγματοληψία και μετά χρήση βαθυπερατού φίλτρου.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, **Καθηγητής Γεώργιος Τζιρίτας** «**Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων - 2-Δ δειγματοληψία**». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: **http://www.csd.uoc.gr/~hy471/**

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ