ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνων

Ενότητα: Κβαντισμός

Καθηγητής Γεώργιος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

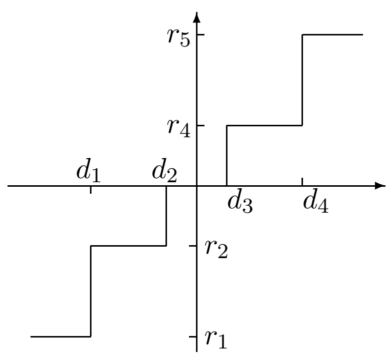
Κεφάλαιο 6

Κβαντισμός

Ένας κβαντιστής (Σχήμα 6.1) αντιστοιχεί σε μία συνεχή μεταβλητή X μία διακριτή τιμή από ένα πεπερασμένο σύνολο $\{r_1, r_2, \ldots, r_N\}$ αντιπροσωπευτικών τιμών. Για τον προσδιορισμό του κβαντιστή απαιτείται αφενός το σύνολο των αντιπροσωπευτικών τιμών και αφετέρου το σύνολο των σημείων απόφασης $\{d_1, d_2, \ldots, d_{N-1}\}$ που χωρίζουν τον άξονα των πραγματικών αριθμών στα ακόλουθα διαστήματα

$$\mathbb{R} = (-\infty, d_1] \cup (d_1, d_2] \cup \cdots \cup (d_{N-1}, \infty). \tag{6.1}$$

Για το σχεδιασμό ενός κβαντιστή παρουσιάζονται στη συνέχεια δύο προσεγγίσεις του θέματος.



Σχήμα 6.1: Ένας συμμετρικός κβαντιστής

Η πρώτη βασίζεται στα συμπεράσματα των πειραμάτων του Weber, και η δεύτερη σε καθαρά στατιστικά κριτήρια.

6.1 Κριτήριο βασισμένο στην οπτική αντίληψη μιας αντίθεσης

Μία δυνατότητα για τον καθορισμό ενός κβαντιστή προσφέρεται από το νόμο του Weber για την αντίληψητης φωτεινής αντίθεσης (Εξίσωση (2.2)). Ας είναι L_0 (αντίστοιχα L_T) η ελάχιστη (αντίστοιχα μέγιστη) τιμή της φωτεινής έντασης που ζητείται η προσέγγισή της από ένα πεπερασμένο σύνολο διακριτών αντιπροσωπευτικών τιμών. Αν υποθέσουμε ότι οι παραπάνω ακραίες τιμές ανήκουν στο διάστημα που ισχύει η σταθερά του Weber C, για να μην είναι ορατή η παραμόρφωση που εισάγει ο κβαντισμός, ο απαιτούμενος αριθμός αντιπροσωπευτικών τιμών είναι τουλάχιστον

$$N = \frac{\log \frac{L_T}{L_0}}{\log(1 + C)} + 1. \tag{6.2}$$

Μία συνηθισμένη τιμή για το λόγο L_T/L_0 είναι 100. Αν επομένως ληφθεί $C = 0,02$, προκύπτει ότι απαιτούνται 234 επίπεδα κβαντισμού, που σημαίνει ότι 8 bits είναι αρκετά κατά κανόνα για να παρασταθούν οι τιμές μιας εικόνας. Αυτή η μέθοδος κβαντισμού ισοδυναμεί με ομοιόμορφο κβαντισμό του λογάριθμου της φωτεινής έντασης.

6.2 Στατιστικό κριτήριο

Ας είναι X μία τυχαία μεταβλητή, της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι $p(x)$. Ζητείται ο προσδιορισμός τόσο των επιπέδων κβαντισμού, όσο και των σημείων απόφασης, για δοσμένο αριθμό N διαστημάτων και επιπέδων κβαντισμού, με τρόπο ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα να ελαχιστοποιείται

$$D = E\{(X - Q(X))^2\} = \sum_{i=1}^{N} \int_{d_{i-1}}^{d_i} (x - r_i)^2 p(x) dx, \tag{6.3}$$

όπου $Q(.)$ είναι ο τελεστής του κβαντισμού, και $d_0 = -\infty$, $d_N = \infty$.

Οι Lloyd και Max έδωσαν τις αναγκαίες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση του D, που συνίστανται σε δύο συστήματα εξισώσεων. Το πρώτο σύστημα δίδει την καλύτερη αντιπροσώπευση, με δοσμένα τα διαστήματα

$$r_i = E\{X | X \in (d_{i-1}, d_i)\} = \frac{\int_{d_{i-1}}^{d_i} x p(x) dx}{\int_{d_{i-1}}^{d_i} p(x) dx}; i = 1, \ldots, N. \tag{6.4}$$

Το δεύτερο σύστημα δίδει την καλύτερη τμηματοποίηση του άξονα των πραγματικών αριθμών με δοσμένα τα επίπεδα αντιπροσώπευσης

$$d_i = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}; i = 1, \ldots, N-1. \tag{6.5}$$

Αναλυτικές εκφράσεις για τη λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων λαμβάνονται μόνο για ειδικές περιπτώσεις κατανομών και αριθμού επιπέδων κβαντισμού.

Παράδειγμα 6.1. Ας υποτεθεί ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[L_0, L_T]$. Τότε από την εξίσωση (6.4) προκύπτει ότι

$$r_i = \frac{d_{i-1} + d_i}{2}.$$

Οπότε από το σύνολο των εξισώσεων, που σ' αυτή την περίπτωση είναι όλες γραμμικές, έχουμε την ακόλουθη λύση για τα όρια των διαστημάτων

$$d_0 = L_0, d_i - d_{i-1} = \frac{L_T - L_0}{N} (i = 1, \ldots, N).$$

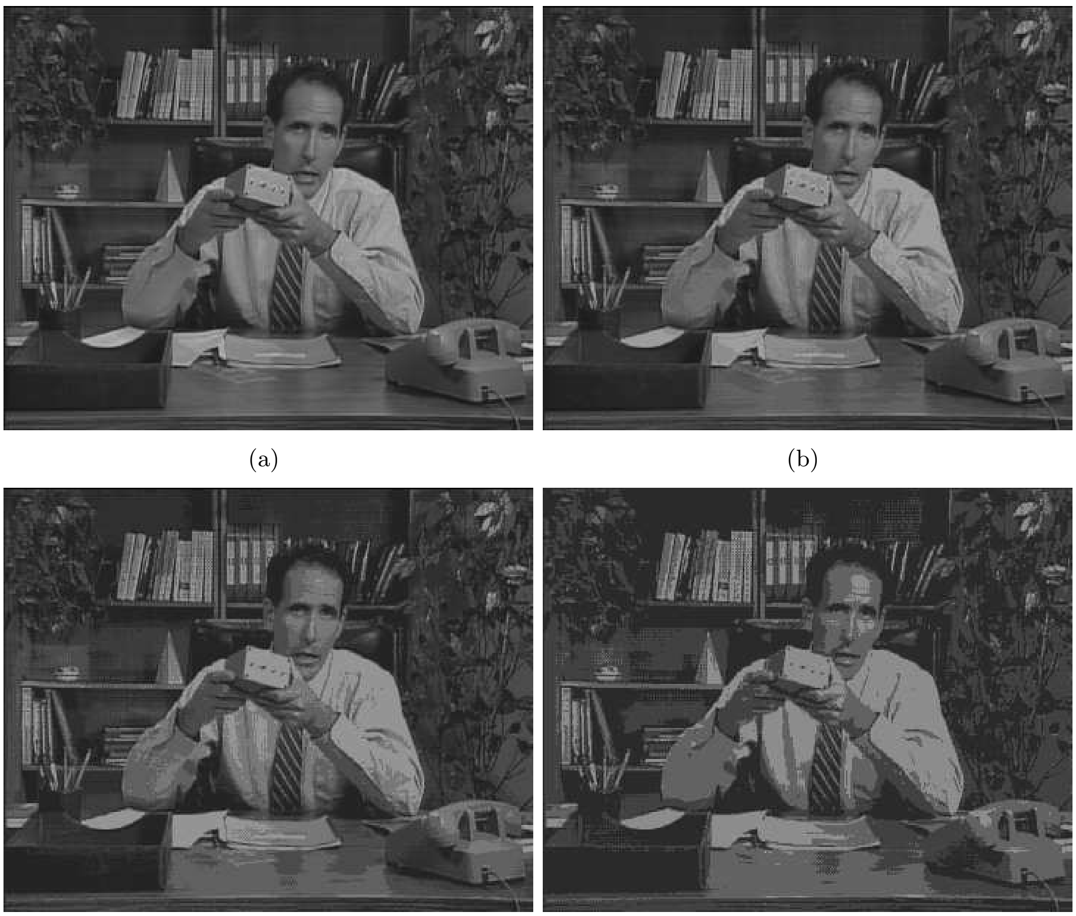
Τα επίπεδα κβαντισμού θα είναι

$$r_i = L_0 + \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{L_T - L_0}{N}, i = 1, \ldots, N.$$

Άρα τα διαστήματα και τα επίπεδα κβαντισμού κατανέμονται ομοιόμορφα στην περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής. Το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι

$$D_{\min} = \frac{(L_T - L_0)^2}{12N^2}.$$

Στη γενική περίπτωση το παραπάνω σύστημα εξισώσεων (6.4) και (6.5) μπορεί να επιλυθεί μόνο με αριθμητικές επαναληπτικές μεθόδους. Μετά από κάποιες αρχικές τιμές για τα επίπεδα κβαντισμού, χρησιμοποιούνται διαδοχικά, και επαναληπτικά μέχρι τη σύγκλιση, οι εξισώσεις (6.5) και (6.4). Πρέπει να σημειωθεί ότι η επαναληπτική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων δεν εξασφαλίζει πάντοτε την ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Μπορεί η σύγκλιση να οδηγήσει σ' ένα τοπικό ελάχιστο, όταν οι παραπάνω συνθήκες είναι μόνο αναγκαίες, αλλά όχι και ικανές για την ελαχιστοποίηση του D. Στο Σχήμα 6.2 δίδονται αποτελέσματα κβαντισμού με χρήση της παραπάνω μεθόδου, όπου η κατανομή πιθανότητας για τις τιμές της έντασης προκύπτει εμπειρικά.



(a) (b) (c) (d)

Σχήμα 6.2: Κβαντισμός σε 256, 16, 8 και 4 επίπεδα προσαρμοσμένα στην κατανομή των αποχρώσεων της εικόνας.

Ο Lloyd-Max κβαντιστής έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

- Η μέση κβαντισμένη τιμή είναι ίση με τη μεση τιμή της μεταβλητής

$$E\{Q(X)\} = E\{X\}.$$

- Η κβαντισμένη τιμή και το σφάλμα κβαντισμού είναι ασυσχέτιστες μεταβλητές

$$E\{(X - Q(X))Q(X)\} = 0.$$

- Η διασπορά του σφάλματος κβαντισμού είναι ίση με τη διαφορά της διασποράς της μεταβλητής μείον τη διασπορά των κβαντισμένων τιμών

$$E\{(X - Q(X))^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - \sum_{i=1}^{N} P_i r_i^2,$$

όπου $P_i = \int_{d_{i-1}}^{d_i} p(x)dx$.

- Ασυμπτωτικά, δηλαδή για μεγάλο N, η διασπορά του σφάλματος κβαντισμού μειώνεται όπως το $1/N^2$,

$$D \approx \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} (p(x))^{1/3} dx\right)^3}{12N^2}.$$

Αν η τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται ομοιόμορφα, τα διαστήματα κβαντισμού είναι ισομήκη, και τα επίπεδα κβαντισμού κατανέμονται ομοιόμορφα, όπως αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 6.1. Ο ομοιόμορφος κβαντιστής προσδιορίζεται με τη χρήση μίας μόνο παραμέτρου, το βήμα του κβαντισμού. Γι' αυτό το λόγο θα μπορούσε να έχει ενδιαφέρον και στην περίπτωση μεταβλητών που δεν κατανέμονται ομοιόμορφα. Αν μία μεταβλητή κατανέμεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, υπάρχει ένα βέλτιστο βήμα κβαντισμού που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Παρουσιάζεται στη συνέχεια το πρόβλημα βελτιστοποίησης στην περίπτωση μίας συμμετρικής μεταβλητής, όταν $p(x) = p(-x)$, με συνέπεια ο κβαντιστής να είναι συμμετρικός, κι όταν επιπλέον ο αριθμός των επιπέδων κβαντισμού είναι άρτιος.

Ας είναι Δ το βήμα του κβαντιστή και $2N$ ο αριθμός των επιπέδων κβαντισμού. Θα έχουμε

$$\left.\begin{array}{lcll} r_i & = & (2i - \mathrm{sgn}(i))\,\frac{\Delta}{2} & , \quad i = \pm 1, \ldots, \pm N \\ d_i & = & i\Delta & , \quad i = 0, \pm 1, \ldots, \pm(N-1) \end{array}\right\} \tag{6.6}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι

$$D = 2\sum_{i=1}^{N-1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \left(x - (2i-1)\frac{\Delta}{2}\right)^2 p(x)dx + 2\int_{d_{N-1}}^{\infty} \left(x - (2N-1)\frac{\Delta}{2}\right)^2 p(x)dx. \tag{6.7}$$

Η λύση ως προς Δ ευρίσκεται με αριθμητικές μεθόδους.

Άσκηση

Δίδεται τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma}\right).$$

1. Να ευρεθεί ο βέλτιστος κατά Lloyd-Max κβαντιστής για $N = 2, 3$ και 4 επίπεδα κβαντισμού. Ποιό είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις;

2. Τα ίδια ερωτήματα τίθενται για το βέλτιστο ομοιόμορφο κβαντιστή.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.