



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εργαστήριο Φυσικής III - Οπτική

Πέτρος Ρακιτζής

Τμήμα Φυσικής

1. ΜΕΛΕΤΗ ΛΕΠΤΩΝ ΦΑΚΩΝ

1. Σκοπός

- Εξοικείωση με βασικές αρχές γεωμετρικής οπτικής
- Μελέτη απλών οπτικών συστημάτων, χρησιμοποιώντας την παραξονική προσέγγιση
 - Μέτρηση εστιακής απόστασης λεπτού συγκεντρωτικού φακού
 - Μέτρηση εστιακής απόστασης λεπτού αποκεντρωτικού φακού
 - Μελέτη συστήματος δύο λεπτών φακών
- Παρατήρηση των χρωματικών σφαλμάτων των φακών

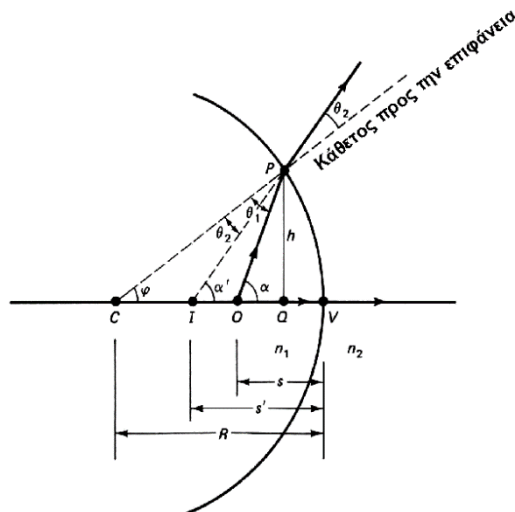
2. Θεωρία

Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, όλο το Κεφ. 36 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

2.1 Διάθλαση από σφαιρική επιφάνεια

Έστω η κοίλη επιφάνεια του Σχήματος 1, που διαχωρίζει δύο μέσα με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 , αντίστοιχα.



Σχήμα 1 : Διάθλαση σε σφαιρική επιφάνεια με $n_2 > n_1$.

Στο σχήμα απεικονίζονται δύο ακτίνες που ξεκινούν από το σημειακό αντικείμενο O . Η μία ακτίνα είναι αξονική (δηλαδή περνά από το O και είναι κάθετη προς την σφαιρική επιφάνεια) και επομένως διαθλάται χωρίς να αλλάξει διεύθυνση. Η άλλη είναι μία τυχαία ακτίνα που προσπίπτει στην επιφάνεια σε σημείο P , και διαθλάται σύμφωνα με τον νόμο του Snell:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1)$$

όπου n_1 και n_2 οι δείκτες διάθλασης του υλικού εσωτερικά και εξωτερικά του κάτοπτρου ενώ θ_1 και θ_2 οι γωνίες που σχηματίζουν οι αντίστοιχες ευθείες με την κάθετο της εφαπτομένης στο σημείο P . Οι δύο διαθλωμένες ακτίνες μοιάζουν να ξεκινούν από το σημείο τομής τους, I (σημειακό είδωλο). Στο τρίγωνο CPO , η εξωτερική γωνία $\alpha = \theta_1 + \varphi$. Στο τρίγωνο CPI , η εξωτερική γωνία $\alpha' = \theta_2 + \varphi$. Για παραξονικές ακτίνες, δηλαδή για ακτίνες που σχηματίζουν μικρή γωνία με τον άξονα, οι γωνίες θ_1 και θ_2 είναι μικρές, και επομένως η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί κατά προσέγγιση ως εξής:

$$n_1 (\alpha - \varphi) = n_2 (\alpha' - \varphi) \quad (2)$$

Επιπλέον, οι γωνίες α , α' και φ μπορούν να αντικατασταθούν από τις εφαπτομένες τους (για μικρές γωνίες), σύμφωνα με το Σχήμα 1 και η απόσταση QV μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα (και πάλι για παραξονικές ακτίνες), οπότε προκύπτει ότι

$$n_1 \left(\frac{h}{s} - \frac{h}{R} \right) = n_2 \left(\frac{h}{s'} - \frac{h}{R} \right)$$

ή

$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad (3)$$

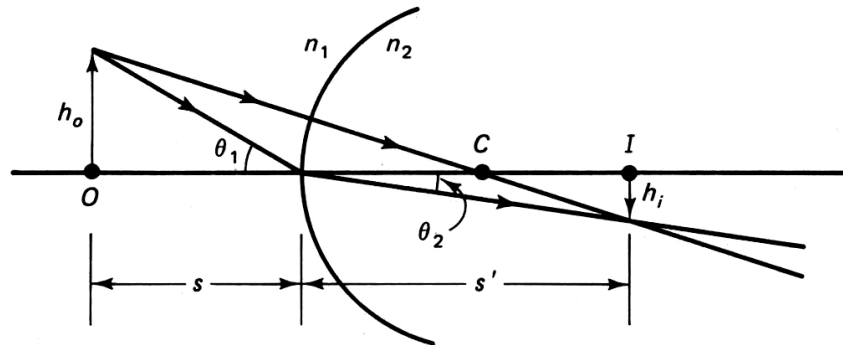
Θεωρώντας ως θετικές τις αποστάσεις για πραγματικά αντικείμενα και είδωλα*, και ως αρνητικές τις αποστάσεις για φανταστικά αντικείμενα και είδωλα¹, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (3), ως εξής

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (4)$$

καθώς στην περίπτωση του Σχήματος 1, $s > 0$, $s' < 0$ και $R < 0$.

Η εξίσωση αυτή ισχύει και για κυρτές επιφάνειες, όπου $R > 0$. Για επίπεδες επιφάνειες, για τις οποίες θέτουμε $R \rightarrow \infty$, προκύπτει από την εξίσωση (4) ότι

$$s' = -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)s$$



Σχήμα 2: Προσδιορισμός της κατακόρυφης μεγέθυνσης από σφαιρική διαθλαστική επιφάνεια.

Η κατακόρυφη μεγέθυνση ενός εκτεταμένου αντικείμενου βρίσκεται εύκολα από το Σχήμα 2. Ο νόμος του Snell απαιτεί, για μία ακτίνα που προσπίπτει στην κορυφή και για μικρές γωνίες, ότι $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$ ή, ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τις εφαπτομένες των γωνιών (για την προσέγγιση των παραξονικών ακτίνων),

$$n_1 \left(\frac{h_o}{s} \right) = n_2 \left(\frac{h_i}{s'} \right)$$

Επομένως, η κατακόρυφη μεγέθυνση δίνεται από την σχέση

¹ Φανταστικό είναι ένα αντικείμενο που βρίσκεται πίσω από τον φακό. Φανταστικό είναι ένα είδωλο που βρίσκεται μπροστά από τον φακό.

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \quad (5)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι το είδωλο είναι αντεστραμμένο.

Παράδειγμα

Θα εξετάσουμε δύο παραδείγματα διάθλασης από σφαιρικές επιφάνειες, τα οποία παρουσιάζονται στο Σχήμα 3. Στο (α), ένα πραγματικό αντικείμενο είναι τοποθετημένο σε αέρα, σε απόσταση 30 cm από την κυρτή σφαιρική διαχωριστική επιφάνεια ακτίνας καμπυλότητας 5 cm. Προς τα δεξιά της επιφάνειας, υπάρχει νερό (δείκτης διάθλασης 1.33). Ο δείκτης διάθλασης του αέρα λαμβάνεται ως 1 στην περίπτωση αυτή.

Πριν από την σχεδίαση αντιπροσωπευτικών ακτίνων θα υπολογίσουμε την απόσταση και την κατακόρυφη μεγέθυνση του ειδώλου, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4) και (5). Η εξ. (4) δίνει:

$$\frac{1}{30} + \frac{1.33}{s'_1} = \frac{1.33-1}{5} \Rightarrow s'_1 = +40\text{cm}$$

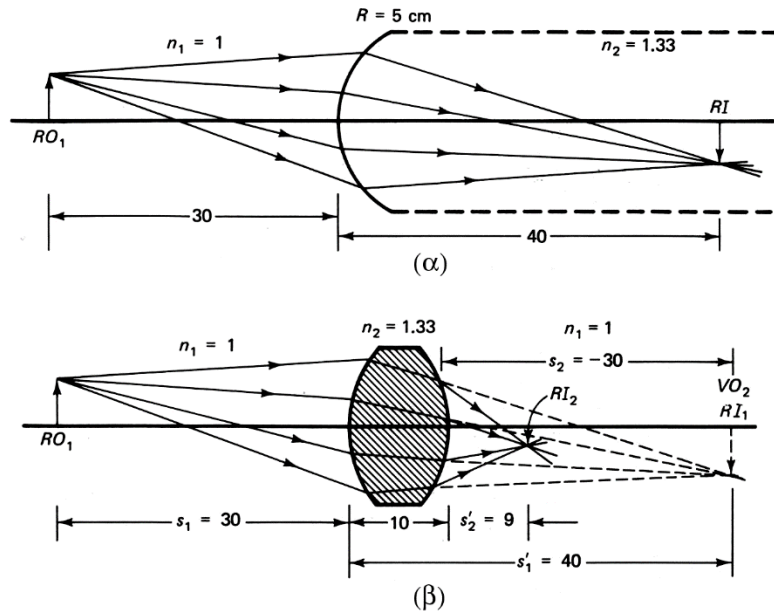
Το θετικό πρόσημο υποδεικνύει ότι το είδωλο είναι πραγματικό και επομένως βρίσκεται στα δεξιά της επιφάνειας.

Η εξίσωση (5) δίνει:

$$m = -\frac{(1)(+40)}{(1.33)(+30)} \Rightarrow m = -1$$

όπου το αρνητικό σημείο δείχνει ότι το είδωλο είναι αντεστραμμένο, και η μονάδα ότι το είδωλο έχει τις ίδιες διαστάσεις με το αντικείμενο.

Στο Σχήμα 3(α) φαίνεται η θέση του ειδώλου, όπως και διάφορες αντιπροσωπευτικές ακτίνες. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε υποθέσει ότι το μέσο στα δεξιά της σφαιρικής επιφάνειας εκτείνεται σε τέτοιο βάθος ώστε το είδωλο να σχηματίζεται μέσα στο μέσο αυτό χωρίς να υπόκειται σε νέα διάθλαση. Ας υποθέσουμε τώρα (Σχήμα 3β) ότι το δεύτερο μέσο έχει πάχος μόλις 10 cm, σχηματίζοντας έτσι ένα παχύ φακό, με μια δεύτερη διαχωριστική επιφάνεια, κοίλη αυτή τη φορά, αλλά ίδιας (κατ' απόλυτη) καμπυλότητας με την πρώτη (R=5cm). Η διάθλαση από την πρώτη επιφάνεια προφανώς δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη της δεύτερης επιφάνειας. Επομένως, μέσα στον φακό, οι ακτίνες κατευθύνονται όπως προηγουμένως, για να σχηματίσουν είδωλο σε απόσταση $s' = 40$ cm από την πρώτη επιφάνεια. Αλλά, οι ακτίνες αυτές συναντούν την δεύτερη επιφάνεια και υπόκεινται σε δεύτερη διάθλαση εκεί, σχηματίζοντας τελικά διαφορετικό είδωλο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3 : Παράδειγμα διάθλασης από σφαιρικές επιφάνειες. (α) Διάθλαση από μία σφαιρική επιφάνεια. (β) Διάθλαση από παχύ φακό. Οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στη διάθλαση στην πρώτη και δεύτερη επιφάνεια αντίστοιχα.

Εφόσον η σύγκλιση των ακτίνων που προσπίπτουν στην δεύτερη επιφάνεια καθορίζεται από την θέση του πρώτου ειδώλου, η θέση του τελευταίου καθορίζει την απόσταση του αντικειμένου για την δεύτερη διάθλαση. Το πραγματικό είδωλο για την επιφάνεια (1) αποτελεί το *φανταστικό αντικείμενο*, όπως λέγεται, για την επιφάνεια (2). Σύμφωνα με την παραδοχή προσήμων που κάναμε προηγουμένως, η απόσταση αυτού του φανταστικού αντικειμένου πρέπει να έχει αρνητικό πρόσημο, όταν χρησιμοποιείται στις εξισώσεις (4) και (5). Έτσι για την δεύτερη διάθλαση έχουμε από την εξ. (4)

$$\frac{1.33}{-30} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1-1.33}{-5} \Rightarrow s'_2 = +9 \text{ cm}$$

Η μεγέθυνση, σύμφωνα με την εξίσωση (5), είναι :

$$m = \frac{(-1.33)(+9)}{(1)(-30)} \Rightarrow m = +\frac{2}{5}$$

Δηλαδή, το ύψος του τελικού ειδώλου είναι τα $2/5$ του ύψους του φανταστικού αντικειμένου, με τον ίδιο προσανατολισμό. Σε σχέση με το αρχικό αντικείμενο, το τελικό είδωλο είναι αντεστραμμένο, και με ύψος ίσο με τα $2/5$ του ύψους του αρχικού αντικειμένου.

Γενικά, όποτε παρεμβαίνουν μία σειρά από ανακλαστικές και διαθλαστικές επιφάνειες στην διαδρομή των ακτίνων για την δημιουργία του τελικού ειδώλου, οι διάφορες ανακλάσεις και διαθλάσεις αναλύονται με την σειρά κατά την οποία το φως προσπίπτει σε αυτές. Η απόσταση του αντικειμένου για την ν-οστή διάθλαση / ανάκλαση, καθορίζεται από την απόσταση του ειδώλου της (ν-1) διάθλασης / ανάκλασης. Εάν το είδωλο του βήματος ν-1 δεν σχηματίζεται στην πραγματικότητα, λειτουργεί ως φανταστικό αντικείμενο για το βήμα ν.

2.2 Λεπτοί Φακοί

Θα εφαρμόσουμε τώρα την προηγούμενη μέθοδο για να αποδείξουμε τον τύπο των λεπτών φακών. Όπως και στο παράδειγμα του Σχήματος 3β, έχουμε δύο διαθλάσεις σε δύο σφαιρικές επιφάνειες. Η απλοποίηση

που κάνουμε είναι να θεωρήσουμε ότι το πάχος του φακού είναι αμελητέο σε σχέση με τις αποστάσεις του αντικειμένου και του ειδώλου. Η προσέγγιση αυτή είναι επαρκής για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές.

Στην πρώτη διαθλαστική επιφάνεια, ακτίνας R_1 ,

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (6)$$

και στην δεύτερη διαθλαστική επιφάνεια, ακτίνας R_2 ,

$$\frac{n_2}{s_2} + \frac{n_1}{s'_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (7)$$

Έχουμε υποθέσει ότι και οι δύο πλευρές του φακού έρχονται σε επαφή με το ίδιο μέσο, με δείκτη διάθλασης n_1 . Τώρα, η απόσταση του δεύτερου αντικειμένου δίνεται από την σχέση:

$$s_2 = t - s'_1 \quad (8)$$

όπου t είναι το πάχος του φακού.

Παρατηρήστε ότι η σχέση αυτή δίνει το σωστό πρόσημο για το s_2 για περιπτώσεις όπως εκείνη του Σχήματος 3, αλλά και όταν το ενδιάμεσο είδωλο πέφτει μέσα στο φακό ή στα αριστερά του φακού. Στην προσέγγιση των λεπτών φακών, το t είναι αμελητέο, οπότε,

$$s_2 = -s'_1 \quad (9)$$

Εάν αντικαταστήσουμε αυτή την τιμή του s_2 στην εξίσωση (7) και αθροίσουμε τις εξισώσεις (6) και (7), οι όροι n_2/s'_2 απαλείφονται και προκύπτει ότι

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_1}{s'_2} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Εφόσον s_1 είναι η απόσταση του αρχικού αντικειμένου και s'_2 τελική απόσταση του ειδώλου, μπορούμε να εγκαταλείψουμε τους δείκτες, οπότε,

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{(n_2 - n_1)}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (10)$$

Ως *εστιακή απόσταση*, f , *λεπτού φακού* ορίζεται η απόσταση του ειδώλου, όταν το αντικείμενο βρίσκεται στο άπειρο, επομένως:

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_2 - n_1)}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (11)$$

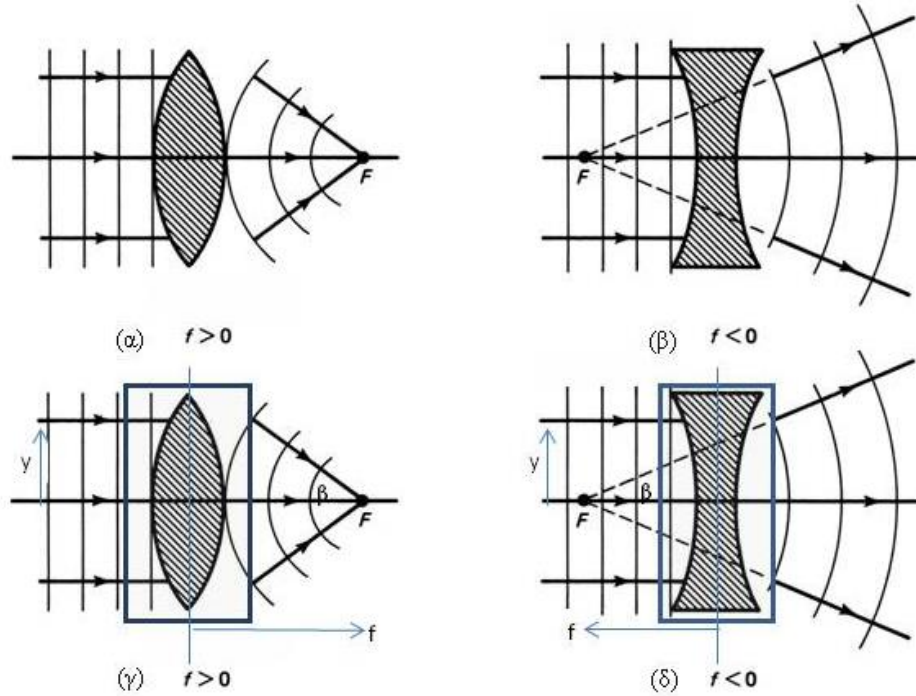
Η εξίσωση (11) αποτελεί τον **τύπο των κατασκευαστών των φακών**, που προβλέπει την τιμή της εστιακής απόστασης λεπτού φακού κατασκευασμένου από υλικό συγκεκριμένου δείκτη διάθλασης, με δεδομένες ακτίνες καμπυλότητας, που χρησιμοποιείται μέσα σε μέσο με δείκτη διάθλασης n_1 . Στις περισσότερες περιπτώσεις το μέσο αυτό είναι ο αέρας, και υποθέτουμε $n_1=1$, που είναι ο δείκτης διάθλασης για το κενό.

Η εξίσωση λεπτών φακών, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εστιακής απόστασης, γίνεται

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (12)$$

Η ανάλυση των κυματικών μετώπων, για επίπεδα κύματα (Σχήμα 4) δείχνει ότι ένας φακός παχύτερος στο μέσο από ότι στα άκρα του προκαλεί σύγκλιση, ενώ ένας φακός λεπτότερος στο μέσο προκαλεί απόκλιση

της προσπίπτουσας παράλληλης φωτεινής δέσμης. Το τμήμα του κυματικού μετώπου που περνά από το παχύτερο μέρος του φακού καθυστερεί σε σχέση με τα άλλα τμήματα. Οι συγκλίνοντες φακοί χαρακτηρίζονται από θετικές εστιακές αποστάσεις, ενώ οι αποκλίνοντες φακοί από αρνητικές, όπως φαίνεται στο σχήμα 4, με τα είδωλα να είναι πραγματικά και φανταστικά, αντίστοιχα. Επίσης, το s και το s' είναι θετικά αν το s είναι από τα αριστερά του φακού και το s' από την δεξιά αλλιώς είναι αρνητικά.



Σχήμα 4: Η επίδραση (α) ενός συγκλίνοντος φακού και (β) ενός αποκλίνοντος φακού σε επίπεδα κυματικά μέτωπα φωτός. (γ-δ) Γενίκευση της έννοιας του φακού: Εάν η γωνία εκτροπής της δέσμης β είναι ανάλογη του ύψους y με $y = f \beta$ τότε το οπτικό στοιχείο (γκρίζο κουτί) που επιφέρει αυτή την εκτροπή στην δέσμη δρά ως φακός είτε η δέσμη είναι ηλεκτρομαγνητική (φως), είτε είναι σωματιδιακή (δέσμη επιταχυντή).

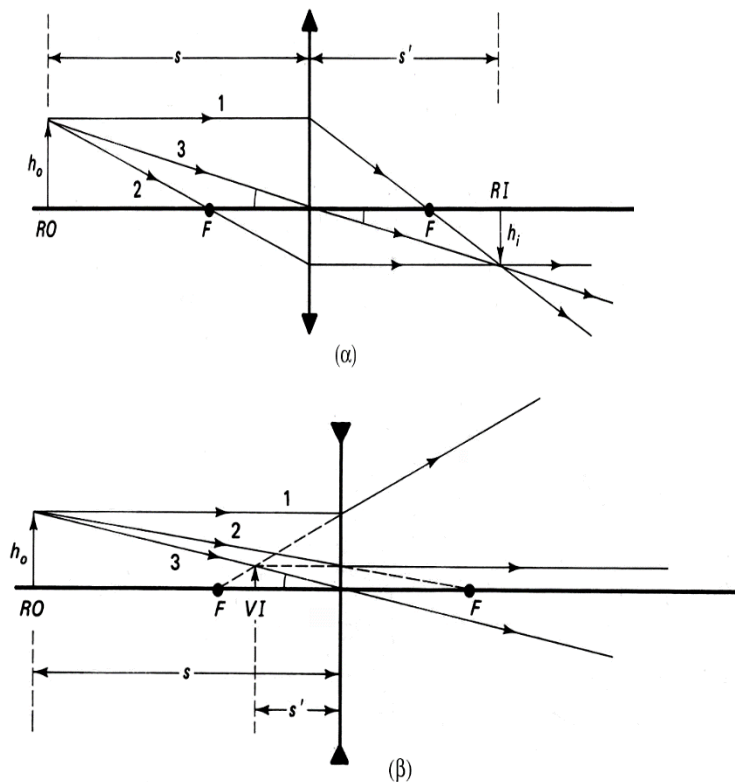
Παραδείγματα διαγραμμάτων ακτίνων για συγκλίνοντες και αποκλίνοντες φακούς δίνονται στο Σχήμα 5. Οι λεπτοί φακοί συμβολίζονται, συνήθως, σε διαγράμματα ακτίνων με ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα που υποδεικνύουν το γενικό σχήμα του φακού.

Η ακτίνα (1) από την κορυφή του αντικείμενου είναι παράλληλη προς τον άξονα, προσπίπτει στον φακό και συγκλίνει περνώντας από την εστία του φακού στην περίπτωση του συγκλίνοντος φακού (5α) ή αποκλίνει σαν να προέρχεται από την εστία στην περίπτωση του αποκλίνοντος φακού (5β). Η ακτίνα (2) είναι αντίστροφη της πρώτης. Αν και οι δύο αυτές ακτίνες είναι αρκετές για την εύρεση της θέσης του ειδώλου, μπορούμε να σχεδιάσουμε και μία τρίτη ακτίνα, που περνά από το κέντρο του φακού χωρίς απόκλιση. Το μέσον του φακού λειτουργεί σαν μία παράλληλη πλάκα, που δεν αλλάζει την κατεύθυνση της ακτίνας, και επειδή είναι λεπτή, προκαλεί αμελητέα μετατόπιση της.

Κατά τον σχεδιασμό των διαγραμμάτων των ακτίνων παρατηρούμε ότι εκτός από την κεντρική ακτίνα, κάθε ακτίνα που διαθλάται από συγκλίνοντα φακό κλίνει προς τον άξονα, ενώ στην περίπτωση του αποκλίνοντα φακού αποκλίνει. Και στις δύο περιπτώσεις, οι γωνίες υπό τις οποίες φαίνονται το αντικείμενο και το είδωλο, είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως, και για το πραγματικό είδωλο του (α) και για το φανταστικό είδωλο του (β) έχουμε ότι

$$\frac{h_0}{s} = \frac{h_i}{s'}$$

ενώ η κατακόρυφη μεγέθυνση δίνεται από την σχέση $m = \frac{h_i}{h_0} = \frac{s'}{s}$.



Σχήμα 5: Διαγράμματα ακτίνων για τον σχηματισμό ειδώλου (α) από συγκλίνοντα φακό και (β) από αποκλίνοντα φακό.

Σύμφωνα με την παραδοχή προσήμων που έχουμε κάνει, πρέπει να προσθέσουμε ένα αρνητικό πρόσημο στην έκφραση αυτή. Στην περίπτωση (α), $s > 0$, $s' > 0$ και $m < 0$, επειδή το είδωλο είναι αντεστραμμένο. Στην περίπτωση (β), $s > 0$, $s' < 0$ και $m > 0$. Έτσι και στις δύο περιπτώσεις,

$$m = -\frac{s'}{s} \quad (13)$$

Ένα ακόμα παράδειγμα διαγράμματος ακτίνων για την περίπτωση συστήματος δύο φακών φαίνεται στο Σχήμα 6.

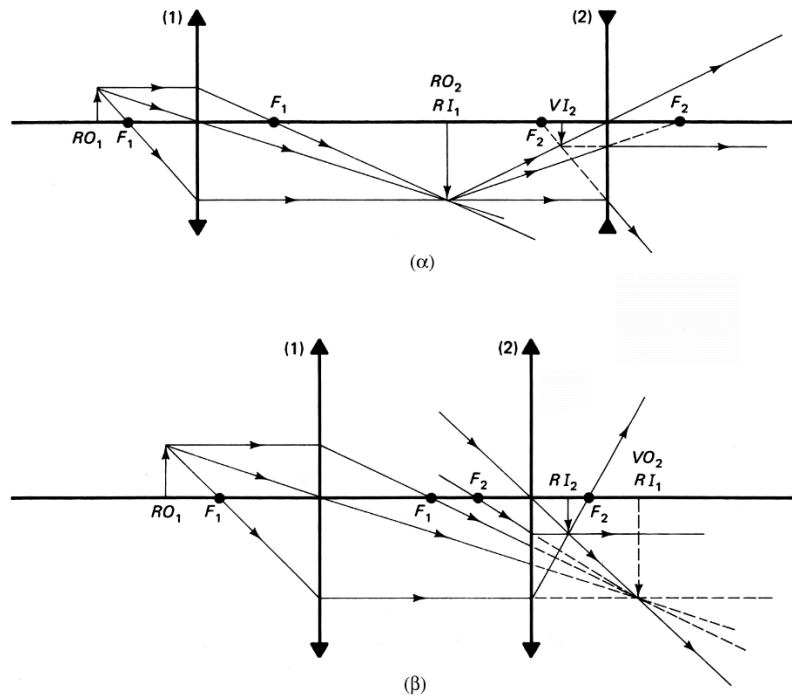
Γενίκευση της έννοιας του φακού

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4(γ) και 4(δ) για έναν αποκλίνοντα ή συγκλίνοντα λεπτό φακό εστιακής απόστασης f ισχύει:

$$\beta \approx \tan \beta = y / f \quad \text{ή} \quad y = f \beta \quad (14)$$

Που ουσιαστικά μας λέει πως η γωνία εκτροπής β είναι ανάλογη του ύψους y από τον άξονα του φακού ή ότι το ύψος y είναι ανάλογο της γωνίας β με σταθερά αναλογίας την εστιακή απόσταση f .

Οποιαδήποτε διάταξη ηλεκτρομαγνητικής οπτικής (light optics) ή σωματιδιακής οπτικής (particle optics) που εκτρέπει μια δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ή σωματιδιακής ακτινοβολίας σύμφωνα με την εξίσωση (14) μπορεί να θεωρηθεί σαν φακός και όλες οι σχέσεις που ξέρουμε για τους οπτικούς φακούς θα ισχύουν για μια τέτοια διάταξη. Η σχέση (14) λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί σαν μια γενίκευση της βασικής ιδιότητας ενός φακού με εφαρμογή όχι μόνο σε δέσμες φωτός (ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία) αλλά και σε σωματιδιακές δέσμες όπως αυτές που χρησιμοποιούνται σε επιταχυντές.



Σχήμα 6: (α) Σχηματισμός φανταστικού ειδώλου από σύστημα δύο φακών, ενός συγκλίνοντος (1) και ενός αποκλίνοντος (2), (β) Σχηματισμός πραγματικού ειδώλου από σύστημα δύο συγκλινόντων φακών. Το ενδιάμεσο είδωλο RI1 παίζει τον ρόλο φανταστικού αντικείμενου VO2 για τον δεύτερο φακό. (RI=real image=πραγματικό είδωλο, VI=virtual image=φανταστικό είδωλο, RO=real object=πραγματικό αντικείμενο, VO=virtual object=Φανταστικό αντικείμενο).

Παράδειγμα

Βρείτε και περιγράψτε τα ενδιάμεσα και τελικά είδωλα που προκύπτουν από το σύστημα φακών του σχήματος 6α. Έστω ότι $f_1=15\text{ cm}$, $f_2=15\text{ cm}$ και ότι η απόσταση μεταξύ των δύο φακών είναι 60 cm . Έστω ότι το αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση 25 cm από τον πρώτο φακό, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Λύση: Ο πρώτος φακός είναι συγκλίνων: $f_1=+15\text{ cm}$, $s_1=+25\text{ cm}$, οπότε:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow s'_1 = \frac{s_1 f}{s_1 - f} = \frac{(25)(15)}{25 - 15} \Rightarrow s'_1 = +37.5\text{ cm}$$

και

$$m_1 = -\frac{s'_1}{s_1} = -\frac{37.5}{25} = -1.5$$

Έτσι το πρώτο είδωλο είναι πραγματικό (εφόσον το s'_1 είναι θετικό), 37.5 cm προς τα δεξιά του πρώτου φακού, και είναι 1.5 φορά ψηλότερο από το αντικείμενο.

Ο δεύτερος φακός είναι αποκλίνων: $f_2 = -15$ cm. Εφόσον πραγματικές ακτίνες φεύγοντας από το πρώτο είδωλο αποκλίνουν, το είδωλο θα αποτελεί πραγματικό αντικείμενο για τον δεύτερο φακό, με $s_2 = 60 - 37.5 = +22.5$ cm, προς τα αριστερά του φακού. Τότε,

$$s'_2 = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = \frac{(22.5)(-15)}{22.5 - (-15)} \Rightarrow s'_2 = -9 \text{ cm}$$

και

$$m_2 = -\frac{s'_2}{s_2} = -\frac{-9}{22.5} = +0.4$$

Έτσι το τελικό είδωλο είναι φανταστικό (εφόσον το s'_2 είναι αρνητικό), 9 cm προς τα αριστερά του δεύτερου φακού, ορθό ως προς το δικό του αντικείμενο (εφόσον το m είναι θετικό), και 0.4 φορές μικρότερο. Η συνολική μεγέθυνση είναι $m = m_1 m_2 = (-1.5)(0.4) = -0.6$. Έτσι, το τελικό είδωλο είναι αντεστραμμένο σε σχέση με το αρχικό αντικείμενο, και έχει ύψος ίσο προς τα 6/10 του ύψους του. Όλα αυτά τα στοιχεία φαίνονται ποιοτικά στο σχήμα 6α.

Πίνακας 1: Συνθήκη προσημού λεπτών φακών.

Ποσότητα	Θετική όταν	Αρνητική όταν
Θέση Αντικειμένου (s)	Αντικείμενο μπροστά από τον φακό (στα αριστερά του φακού)	Αντικείμενο πίσω από τον φακό (στα δεξιά του φακού)
Θέση Ειδώλου (s')	Είδωλο πίσω από τον φακό (στα δεξιά του φακού)	Είδωλο μπροστά από τον φακό (στα αριστερά του φακού)
Υψος Ειδώλου (h')	Είδωλο όρθιο (ίδια φορά με το αντικείμενο του)	Είδωλο ανάποδο (αντίθετη φορά από το αντικείμενο του)
R_1 και R_2	Κέντρο καμπυλότητας πίσω από τον φακό	Κέντρο καμπυλότητας μπροστά από τον φακό
Εστιακή απόσταση (f)	Συγκεντρωτικός φακός	Αποκεντρωτικός φακός

2.3 Σφάλματα φακών

Γενικά: Στην προηγούμενη ανάλυση ακολουθήσαμε την παραξονική προσέγγιση για την μελέτη σχηματισμού ειδώλου από μία διαθλαστική σφαιρική επιφάνεια. Μαθηματικά, η προσέγγιση αυτή σημαίνει ότι από τα αναπτύγματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \text{ και } \cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right)$$

διατηρούνται μόνο οι πρώτοι όροι. Όταν ισχύει η προσέγγιση αυτή, η γεωμετρική οπτική προβλέπει σαφή είδωλα. Εάν συμπεριλάβουμε όρους μεγαλύτερης τάξης, τότε προκύπτουν αποκλίσεις από την «τέλεια» απεικόνιση, που ονομάζονται «σφάλματα». Όταν συμπεριληφθεί ο δεύτερος όρος του αναπτύγματος του $\sin(x)$, που περιέχει το x^3 , τότε αναφερόμαστε στην θεωρία σφαλμάτων τρίτης τάξης, ή στα λεγόμενα σφάλματα Seidel. Για μονοχρωματική ακτινοβολία τα σφάλματα αυτά είναι: η σφαιρική εκτροπή, η κόμμη, ο αστιγματισμός, η καμπυλότητα πεδίου και η παραμόρφωση.

Η σφαιρική εκτροπή οφείλεται στο γεγονός ότι οι ακτίνες που προσπίπτουν στην κεντρική ζώνη ενός σφαιρικού φακού (ή κατόπτρου) εστιάζονται μακρύτερα από τις ακτίνες ίδιου μήκους κύματος που προσπίπτουν στις περιφερειακές ζώνες του φακού.

Η **κόμη** απαντάται σε φακούς οι οποίοι έχουν μεγάλα σφαιρικά σφάλματα, και παράγει ένα είδωλο (σημειακού αντικειμένου) σε σχήμα κομήτη.

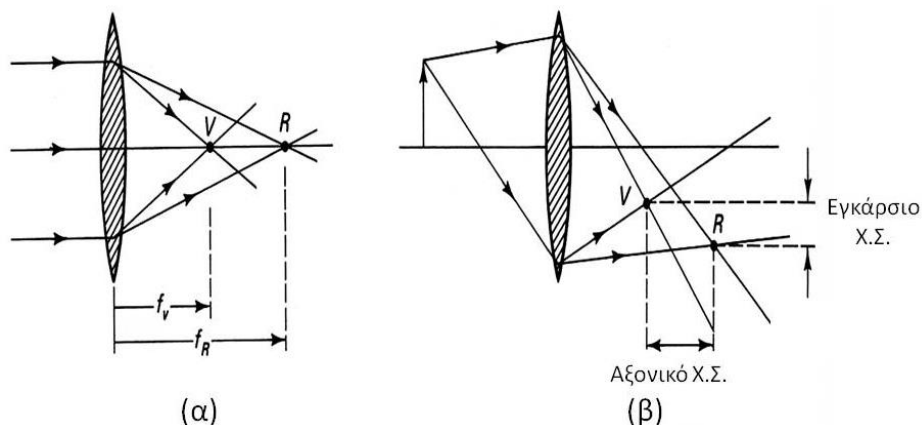
Ο **αστιγματισμός** παρατηρείται όταν οι ακτίνες ενός αντικειμένου σχηματίζουν **μεγάλη γωνία** με τον κύριο άξονα. Τότε οι ακτίνες δεν τέμνονται στην εστία αλλά διέρχονται από δύο ευθείες (εστιακές γραμμές).

Η **παραμόρφωση** απαντάται όταν το αντικείμενο έχει μεγάλες διαστάσεις και οφείλεται στο ότι η μεγέθυνση των σημείων μακριά από τον άξονα διαφέρει από την μεγέθυνση των σημείων κοντά στον άξονα. Λεπτομερέστερη ανάλυση των σφαλμάτων Seidel υπάρχει στην βιβλιογραφία που δίνεται στο τέλος του κεφαλαίου.

Ένα άλλο πολύ σημαντικό σφάλμα, που θα μελετήσετε στο πείραμά σας, είναι το λεγόμενο **χρωματικό σφάλμα** (ή **χρωματική εκτροπή**), που οφείλεται στην εξάρτηση των ιδιοτήτων απεικόνισης ενός οπτικού συστήματος από το μήκος κύματος του φωτός. Το χρωματικό σφάλμα ενός φακού περιγράφεται απλά στο Σχήμα 7α.

Εφόσον η εστιακή απόσταση f ενός φακού εξαρτάται από τον δείκτη διάθλασης του υλικού του φακού, θα εξαρτάται και από το μήκος κύματος. Στο σχήμα φαίνεται η εστίαση (από φακό) παράλληλης πολυχρωματικής δέσμης σε διαφορετικά εστιακά σημεία για το ερυθρό (R) και το ιώδες (V) άκρο του ορατού φάσματος. Εάν η προσπίπτουσα ακτινοβολία εμπεριέχει όλα τα μήκη κύματος του ορατού φάσματος, τα ενδιάμεσα χρώματα εστιάζονται μεταξύ αυτών των δύο σημείων πάνω στον άξονα. Όπως και στην περίπτωση του πρίσματος, (βλ. επόμενο κεφάλαιο) τα μικρότερα μήκη κύματος παθαίνουν μεγαλύτερη διάθλαση, και έτσι η εστία για το ιώδες βρίσκεται πλησιέστερα στον φακό (για συγκλίνοντα φακό). Στο Σχήμα 7β φαίνεται το αποτέλεσμα του χρωματικού σφάλματος στην απεικόνιση ενός σημειακού αντικειμένου εκτός άξονα. Σημειώνονται και το **αξονικό** και **εγκάρσιο** χρωματικό σφάλμα.

Το χρωματικό σφάλμα των αποκλινόντων φακών είναι αντίθετο από εκείνο των συγκλινόντων. Μπορούμε, επομένως, να μειώσουμε το αποτέλεσμα της χρωματικής εκτροπής, εάν χρησιμοποιήσουμε έναν συνδυασμό συγκλινόντος και αποκλινόντος φακού, οι οποίοι όμως πρέπει να είναι κατασκευασμένοι από διαφορετικά υλικά (βλ. άσκηση 4).



Σχήμα 7: Χρωματικό σφάλμα λεπτού φακού. Στο σχήμα φαίνεται η επίδραση του χρωματικού σφάλματος στην εστιακή απόσταση (α), και το εγκάρσιο και αξονικό χρωματικό σφάλμα (β) για κόκκινη (R) και ιώδη ακτινοβολία (V).

Ασκήσεις θεωρίας:

1. Μέθοδος μετατόπισης Bessel για την μέτρηση της εστιακής απόστασης φακού

Ένας φακός κινείται κατά μήκος του οπτικού άξονα, μεταξύ ακίνητου αντικειμένου και ακίνητης οθόνης παρατήρησης. Το αντικείμενο και η οθόνη απέχουν κατά L μεταξύ τους (με $L > 4f$, όπου f η εστιακή απόσταση του φακού). Υπάρχουν δύο θέσεις του φακού για τις οποίες έχουμε ευκρινές είδωλο στην οθόνη. Στην μία περίπτωση το είδωλο έχει υποστεί μεγέθυνση και στην άλλη σμίκρυνση. Εάν οι δύο αυτές θέσεις του φακού απέχουν μεταξύ τους κατά D , αποδείξτε ότι η εστιακή απόσταση του φακού δίνεται από την

σχέση $f = (L^2 - D^2)/4L$. Αυτή είναι η μέθοδος μετατόπισης Bessel για την μέτρηση της εστιακής απόστασης φακού. Τι γίνεται στην περίπτωση που $L < 4f$; Δημιουργείται είδωλο και με τι μεγένθυση;

2. Μέθοδος Abbe για την μέτρηση της εστιακής απόστασης φακού

Το είδωλο του αντικειμένου σχηματίζεται πάνω στην οθόνη μέσω ενός φακού. Αφήνοντας τον φακό σταθερό, το αντικείμενο μετατοπίζεται σε μία διαφορετική θέση, και η οθόνη μετατοπίζεται μέχρις ότου να σχηματισθεί ξανά ευκρινές είδωλο. Εάν οι δύο θέσεις του αντικειμένου είναι S_1 και S_2 και εάν η κατακόρυφη μεγένθυση του ειδώλου είναι M_1 και M_2 , αντίστοιχα, αποδείξτε ότι η εστιακή απόσταση του φακού δίνεται απ τον τύπο

$$f = \frac{(S_2 - S_1)}{(1/M_1 - 1/M_2)}$$

Αυτή είναι η μέθοδος Abbe για την μέτρηση της εστιακής απόστασης φακού.

3. Αποδείξτε ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ ενός αντικειμένου και του ειδώλου του που σχηματίζεται από λεπτό φακό είναι $4f$. Πότε συμβαίνει αυτό;

4. Υπολογίστε τις ακτίνες καμπυλότητας που πρέπει να έχουν δύο φακοί (κατασκευασμένοι από διαφορετικό υλικό) για να αποτελούν ένα *αχρωματικό ζεύγος* (achromatic doublet). Βλ. π.χ. F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, Prentice Hall International Editions, 1993, ch. 5.7.

5. Δείξτε ότι από την σχέση (14) εύκολα απορρέει η βασική εξίσωση των λεπτών φακών (12).

3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Για την μελέτη λεπτών φακών χρησιμοποιείται η διάταξη που φαίνεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Πειραματική διάταξη περιλαμβάνει τον οπτικό διάδρομο στον οποίο στερεώνονται τα διάφορα οπτικά στοιχεία, φακούς, κάτοπτρο, οθόνη, λάμπα πυρακτώσεως και έγχρωμα φίλτρα.

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει:

- Οπτικό διάδρομο για την τοποθέτηση των διαφόρων οπτικών στοιχείων
- Συγκεντρωτικούς και αποκεντρωτικούς λεπτούς φακούς διαφόρων εστιακών αποστάσεων, σε κατάλληλες βάσεις
- Οθόνη, με χαρτί μιλλιμετρέ, σε κατάλληλη βάση
- Επίπεδο κάτοπτρο (καθρέφτη) σε κατάλληλη βάση
- Έγχρωμα φίλτρα (μπλε, κόκκινο, πράσινο)

- Λαμπτήρα εκπομπής συνεχούς φάσματος σε κατάλληλη βάση
- Σχισμή μεταβλητού εύρους

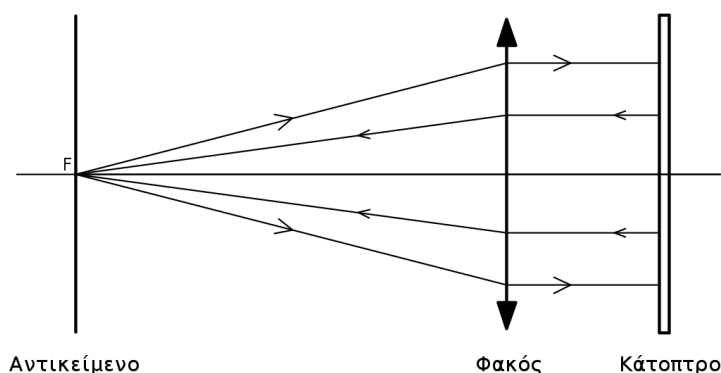
4. Εκτέλεση του πειράματος

4.1. Μέτρηση της εστιακής απόστασης λεπτού συγκεντρωτικού φακού

Με την μέθοδο της αυτοεστίασης

Τοποθετήστε τον φακό κάθετα προς την δέσμη της πηγής, έχοντας βεβαιωθεί ότι οι άξονες συμμετρίας της πηγής και του φακού συμπίπτουν. Στη συνέχεια τοποθετήστε ένα επίπεδο κάτοπτρο μετά τον φακό, ώστε να ανακλάται η δέσμη πίσω στο επίπεδο της πηγής. Μετατοπίστε τον φακό ή το αντικείμενο κατά μήκος του άξονα που συνδέει τα κέντρα των δύο οπτικών στοιχείων και της πηγής. Όταν σχηματιστεί ευκρινώς το είδωλο επάνω στο επίπεδο του αντικειμένου, μετρήστε την απόσταση φακού – αντικείμενου. Αυτή είναι η εστιακή απόσταση του παρόντος λεπτού φακού. **Εξηγήστε γιατί** (βλέπε σχήμα 9).

Υπολογίστε την εστιακή απόσταση f του φακού. Εκτιμήστε το σφάλμα της μέτρησής σας.



Σχήμα 9: Μέτρηση εστιακής απόστασης φακού με την μέθοδο της αυτοεστίασης

Με την χρήση του τύπου των κατασκευαστών των φακών

Μετακινήστε το φακό (ή το αντικείμενο) και προσδιορίστε την θέση της οθόνης για την οποία το είδωλο είναι ευκρινές. Μετρήστε τις αποστάσεις $s=AS_1$ και $s'=S_1A'$ (Σχήμα 10α). Υπολογίστε την αντίστοιχη τιμή του f . Επαναλάβετε την μέτρηση αρκετές φορές. Υπολογίστε την μέση τιμή του f και το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα.

Με την μέθοδο της μετατόπισης (μέθοδος Bessel)

Υπολογίστε την εστιακή απόσταση f (και εκτιμήστε το αντίστοιχο σφάλμα) ενός συγκεντρωτικού φακού χρησιμοποιώντας την μέθοδο Bessel (βλ. άσκηση 1 της θεωρίας).

Με την μέθοδο Abbe

Υπολογίστε την εστιακή απόσταση f (και εκτιμήστε το αντίστοιχο σφάλμα) ενός συγκεντρωτικού φακού χρησιμοποιώντας την μέθοδο Abbe (βλ. άσκηση 2 της θεωρίας).

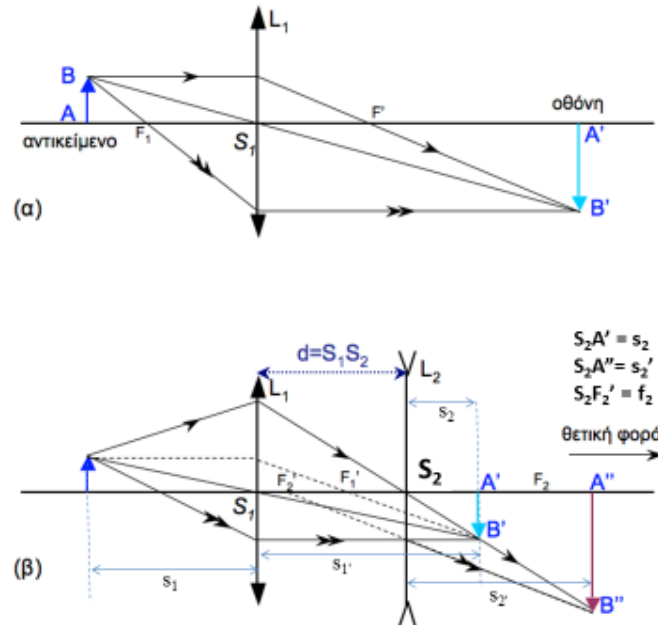
Συγκρίνατε τα αποτελέσματα και των 4 διαφορετικών μεθόδων και σχολιάστε τυχόν διαφορές στην τιμή και την ακρίβεια τους

4.2 Μέτρηση της εστιακής απόστασης ενός λεπτού αποκεντρωτικού φακού

- Βλέπε το Σχήμα 10β
- Η μέτρηση αυτή θα γίνει με βάση τον τύπο των λεπτών φακών και την χρήση ενός βοηθητικού φακού. Όπως είναι γνωστό από την θεωρία, ένας αποκεντρωτικός φακός δεν δίνει πραγματικό είδωλο ενός πραγματικού αντικειμένου. Γι' αυτό θα χρησιμοποιηθεί ένας βοηθητικός φακός, ο οποίος θα παρέχει φανταστικό αντικείμενο στον αποκλίνοντα φακό οπότε το τελικό είδωλο θα είναι πραγματικό. Προσέξτε στο σχήμα ότι το είδωλο του βοηθητικού συγκεντρωτικού φακού παίζει πράγματι τον ρόλο του αντικειμένου για τον αποκεντρωτικό που μελετάτε.
- Αρχικά τοποθετήστε και ευθυγραμμίστε τον συγκεντρωτικό φακό L_1 . Τοποθετήστε την οθόνη σε κατάλληλη θέση (A') ώστε να σχηματιστεί σ' αυτή ευκρινές είδωλο. Μεταξύ του L_1 και της οθόνης τοποθετήστε, σε τυχαία θέση, τον αποκεντρωτικό φακό L_2 . Πριν μετακινήσετε την οθόνη, μετρήστε

την απόσταση L_2 – οθόνης. Αυτό είναι το s_2 . Μετακινήστε τώρα την οθόνη μέχρι να πάρετε καθαρή εικόνα (A''). Η απόσταση L_2 – οθόνης είναι το s_2' . Μετρήστε την.

- Προσέξτε τα πρόσημα των s_2 και s_2' (απόσταση αντικειμένου από τον αποκλίνοντα φακό και απόσταση ειδώλου από τον αποκλίνοντα φακό, αντίστοιχα). Είναι και τα 2 θετικά;
- Υπολογίστε την εστιακή απόσταση, f_2 , του αποκεντρωτικού φακού.
- Επανάλαβετε τη διαδικασία αρκετές φορές, μεταβάλλοντας π.χ. την θέση του βοηθητικού φακού, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση την f_2 .
- Υπολογίστε την μέση τιμή των f_2 και το αντίστοιχο σφάλμα μέσης τιμής.
- Σκεφθείτε πώς θα μπορούσατε να μετρήσετε την εστιακή απόσταση του αποκλίνοντος φακού χωρίς την χρήση βοηθητικού φακού. Κάνετε τις απαραίτητες μετρήσεις και προσδιορίστε την εστιακή απόσταση του αποκλίνοντα φακού καθώς και το αντίστοιχο σφάλμα Δf_2 .



Σχήμα 10: Διαγράμματα μέτρησης εστιακής απόστασης: (α) ενός συγκεντρωτικού φακού και (β) ενός αποκεντρωτικού φακού. Τα f_1 (S_1F_1'), s_1 , s_1' , s_2' είναι θετικά, ενώ f_2 (S_1F_2') και s_2 είναι αρνητικά.

4.3 Σύστημα φακών L_1+L_2

- Τοποθετήστε δύο λεπτούς φακούς L_1 και L_2 σε απόσταση $d > f_1+f_2$ μεταξύ τους (σχήμα 6β).
- Με την βοήθεια μίας οθόνης προσδιορίστε την θέση όπου εμφανίζεται ευκρινές είδωλο. Εκτιμήστε το σφάλμα της μέτρησής σας
- Μετρήστε το μέγεθος του ειδώλου της σχισμής (η οποία είναι το αντικείμενό σας). Εκτιμήστε το σφάλμα της μέτρησής σας
- Υπολογίστε την θέση του ειδώλου και την μεγέθυνσή του, ακολουθώντας την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην θεωρία (παρ. 2.2). Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τις μετρήσεις σας.

4.4 Χρωματικά σφάλματα φακού

- Από το πρώτο μέρος του πειράματος, επιλέξτε την μέθοδο που θεωρείτε την πλέον ακριβή
- Μετρήστε την θέση της εστίας λεπτού φακού, όταν τοποθετήσετε μπροστά από την πηγή σας είτε ένα μπλε ($B=Blue$), είτε ένα κόκκινο ($R=Red$) φίλτρο.
- Υπολογίστε την διαφορά $f_R - f_B$ και εκτιμήστε την ακρίβεια των μετρήσεών σας.
- Προτείνετε τρόπους με τους οποίους θα μπορούσατε να βελτιώσετε την ακρίβεια της συγκεκριμένης μέτρησης.
- Προτείνετε έναν τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε να ελαχιστοποιηθεί το χρωματικό σφάλμα.

4.5 Άσκηση

Φτιάξτε μία παράλληλη δέσμη φωτός. Σκεφτείτε πώς μπορείτε να ελαττώσετε στο μισό την διάμετρο της δέσμης αυτής. Κάνετε την κατάλληλη διάταξη. Ελέγξτε ότι επιτύχατε το ζητούμενο.

Βιβλιογραφία

- R.A. Serway, Physics for scientists and engineers, Τόμος ΙΙΙ, κεφ. 36
- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993, ch. 3
- E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Publishing Company, 1987, ch. 5.2.2, 5.2.3, 6.3.2
- Feynman, Lectures on Physics, κεφ. 27-6 (τόμος Ι)
- Halliday-Resnick, Φυσική, τομ. ΙΙ, παράγραφοι 42.4, 42.5
- Μαθήματα Φυσικής Πανεπιστημίου Berkeley, τομ. 3 (Κυματική), παράγραφος 9.7

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π. Ρακιτζής, 2014. «Εργαστήριο Φυσικής III - Οπτική». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

