



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

Εργαστήριο Φυσικής III - Οπτική

Πέτρος Ρακιτζής

Τμήμα Φυσικής

4. ΠΟΛΩΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

1. Σκοπός

- Μελέτη καταστάσεων πόλωσης φωτός
- Μεταβολή της κατάστασης πόλωσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος
 - Χρήση πολωτικών φίλτρων (διχρωϊσμός) – Νόμος του Malus
 - Χρήση πλακιδίων καθυστέρησης ($\lambda/2$, $\lambda/4$) (διπλοθλαστικότητα)
 - Γωνία Brewster – πόλωση από ανάκλαση

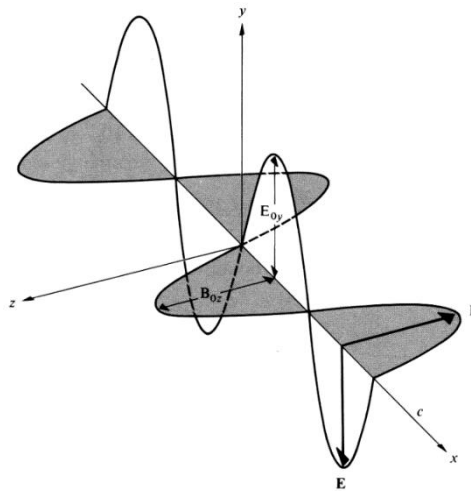
2. Θεωρία

Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Κεφ. 38.6, (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

2.1 Εισαγωγικά

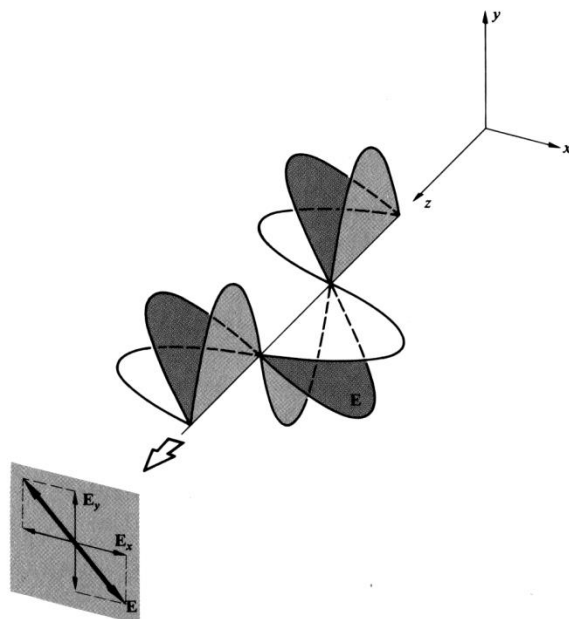
Είναι γνωστό ότι το φως και γενικά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα **είναι εγκάρσια κύματα**, με το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο να ταλαντώνονται κάθετα μεταξύ τους και κάθετα προς την διεύθυνση διάδοσης (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Στιγμιότυπο Η-Μ κύματος που διαδίδεται κατά τον άξονα x

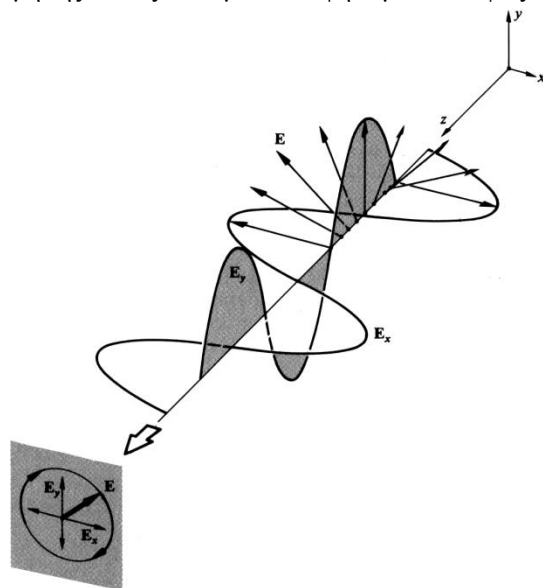
Βασική εκδήλωση της εγκαρσιότητας των ηλεκτρομαγνητικών (Η-Μ) κυμάτων είναι τα φαινόμενα **πόλωσης**, τα οποία δεν παρατηρούνται σε διαμήκη κύματα (όπου η ταλάντωση γίνεται παράλληλα προς την διεύθυνση διάδοσης). Τέτοια φαινόμενα θα μελετήσουμε στο πείραμα που ακολουθεί.

Το επίπεδο που ορίζεται από την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου και από την διεύθυνση διάδοσης του Η-Μ κύματος λέγεται **επίπεδο πόλωσης ή ταλάντωσης**. Όταν το επίπεδο πόλωσης είναι πάντα παράλληλο προς το ίδιο σταθερό επίπεδο, τότε το Η-Μ κύμα ονομάζεται **γραμμικά ή επίπεδα πολωμένο** (βλ. Σχήμα 2). Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ταλαντώνεται ημιτονοειδώς μεταξύ μέγιστης θετικής και ελάχιστης αρνητικής τιμής



Σχήμα 2: Γραμμικά ή επίπεδα πολωμένο φως.

Μία άλλη συνηθισμένη κατάσταση πόλωσης είναι η λεγόμενη **κυκλική πόλωση**, στην οποία το ηλεκτρικό πεδίο παραμένει χρονικά σταθερό ως προς το μέτρο του, ενώ η διεύθυνσή του μεταβάλλεται συνεχώς, έτσι ώστε η αιχμή του διανύσματος \vec{E} να διαγράφει –καθώς διαδίδεται το κύμα- μία έλικα με κυκλική διατομή (βλ. Σχήμα 3). Όταν η διατομή της έλικας είναι μία έλλειψη λέμε ότι το φως είναι ελλειπτικά πολωμένο.



Σχήμα 3: Κυκλικά πολωμένο φως.

Μία συνηθισμένη πηγή φωτός (π.χ. μία λάμπα πυρακτώσεως) περιλαμβάνει ένα πολύ μεγάλο αριθμό από ατομικά δίπολα – πομπούς, με τυχαίους προσανατολισμούς. Κάθε διεγερμένο άτομο εκπέμπει ένα πολωμένο κυματοσυρμό διάρκειας περίπου 10^{-8} sec. Όλα τα εκπεμπόμενα κύματα της ίδιας συχνότητας συντίθενται για να σχηματίσουν ένα πολωμένο κύμα διάρκειας 10^{-8} sec. Νέοι κυματοσυρμοί εκπέμπονται διαρκώς και η πόλωση αλλάζει με ένα εντελώς απρόβλεπτο τρόπο. Εάν αυτές οι αλλαγές της κατάστασης

πόλωσης αλλάζουν τόσο γρήγορα ώστε να μην μπορούμε να διακρίνουμε μία συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης, λέμε ότι έχουμε **μη πολωμένο φως ή φυσικό φως**.

2.2 Μαθηματική αναπαράσταση του πολωμένου φωτός – διανύσματα Jones

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα έχει τη μορφή

$$\vec{E} = \vec{E}_o \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad (1)$$

Το διάνυσμα \vec{E}_o δίνει το πλάτος και την κατεύθυνση ταλάντωσης του πεδίου, \vec{k} είναι το κυματόνυσμα με μέτρο ίσο προς $2\pi/\lambda$, $\omega (=2\pi\nu)$ είναι η κυκλική συχνότητα και ϕ η φάση του κύματος. Το διάνυσμα θέσης είναι

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad (2)$$

και το κυματόνυσμα

$$\vec{k} = \hat{i}k_x + \hat{j}k_y + \hat{k}k_z \quad (3)$$

όπου $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ τα μοναδικά διανύσματα των αξόνων x,y,z και

$$|k| = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad (4)$$

Επειδή ισχύει η σχέση του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (5)$$

μπορούμε τη σχέση (1) να την εκφράσουμε και ως

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (6)$$

όπου νοείται ότι στο τέλος των οποιωνδήποτε πράξεων κρατάμε το πραγματικό τμήμα του μιγαδικού αριθμού. Αυτό γίνεται για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς. Προφανώς, έχουμε ότι

$$\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \phi) = \text{Re} \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \right] \quad (7)$$

όπου το Re σημαίνει ότι παίρνουμε το πραγματικό τμήμα της μιγαδικής συνάρτησης.

Έστω μια ακτίνα πολωμένου φωτός με ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} που διαδίδεται κατά τον άξονα +z. Τότε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να αναλυθεί σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες E_x και E_y και ταλαντώσεις στο E αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις των E_x και E_y . Σύμφωνα με την 2.2-6 θα έχουμε ότι

$$E_x = E_{ox} e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \quad (8)$$

$$E_y = E_{oy} e^{i(kz - \omega t + \phi_y)}$$

και χρησιμοποιώντας τα μοναδιαία διανύσματα \hat{i} και \hat{j} ,

$$\vec{E} = \hat{i}E_x + \hat{j}E_y \quad (9)$$

Δηλαδή

$$\vec{E} = [\hat{i}E_{ox} e^{i\phi_x} + \hat{j}E_{oy} e^{i\phi_y}] e^{i(kz - \omega t)} \quad (10)$$

ή

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(kz - \omega t)} \quad (11)$$

όπου το \tilde{E}_o είναι το λεγόμενο **μυγαδικό πλάτος** του πολωμένου φωτός.

Η κατάσταση πόλωσης του Η-Μ κύματος καθορίζεται πλήρως από το σχετικό πλάτος και τις φάσεις των δύο συνιστωσών. **Αρκεί επομένως να εξετάσουμε το μυγαδικό αυτό πλάτος του κύματος, που μπορεί να γραφεί υπό μορφή πίνακα δύο στοιχείων, του λεγόμενου διανύσματος Jones**

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{ox} \\ \tilde{E}_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\phi_x} \\ E_{oy}e^{i\phi_y} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Στη συνέχεια θα καθορίσουμε τα διανύσματα Jones για διάφορες καταστάσεις πόλωσης.

• **Γραμμική πόλωση**

Όπως προαναφέρθηκε, γραμμική πόλωση έχουμε όταν η συνισταμένη των E_x και E_y σχηματίζει σταθερή γωνία με τον άξονα των x . Θα εξετάσουμε πρώτα την απλή περίπτωση γραμμικής πόλωσης κατά μήκος του άξονα x . Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση $E_x=A$, όπου A το πλάτος του πεδίου, $E_y=0$. Επομένως το αντίστοιχο διάνυσμα Jones θα είναι

$$\tilde{E}_o = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

όπου θέσαμε $\phi_x = \phi_y = 0$, εφόσον υπάρχει μόνο μία συνιστώσα.

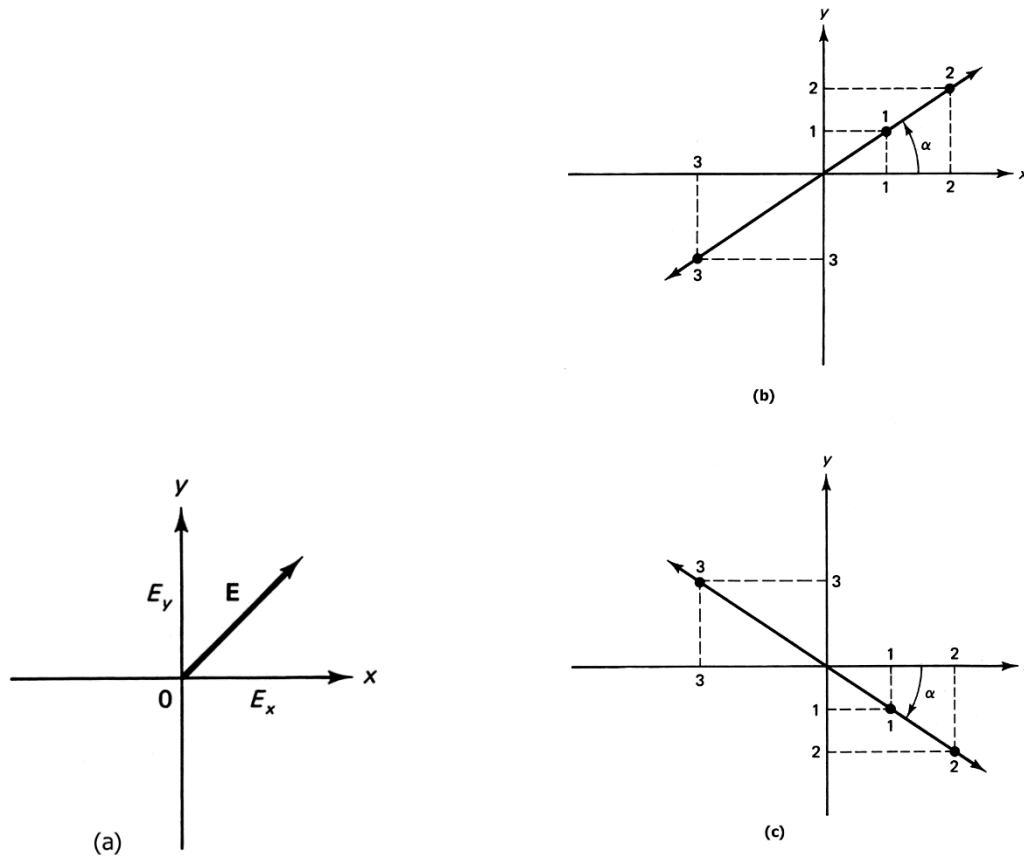
Όμοια, γραμμική πόλωση κατά μήκος του άξονα y , εκφράζεται από το διάνυσμα Jones

$$\tilde{E}_o = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Εύκολα μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω, για την περίπτωση γραμμικά πολωμένου φωτός κατά μία τυχαία γωνία a , ως προς τον άξονα των x . Είναι προφανές από το Σχήμα 4c ότι στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{ox}e^{i\phi_x} \\ \tilde{E}_{oy}e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos a \\ \sin a \end{bmatrix} \quad (15)$$

όπου η διαφορά φάσης ($\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$) μεταξύ των δύο συνιστωσών έχει ληφθεί ίση με μηδέν (ισοδύναμα, η διαφορά φάσης θα μπορούσε να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π). Σε αυτή την περίπτωση η πόλωση της συνισταμένης είναι στο πρώτο ή τρίτο τεταρτημόριο. Είναι προφανές ότι τότε οι δύο ορθογώνιες συνιστώσες φθάνουν ταυτόχρονα την μέγιστή τους τιμή, $+A$, και περνούν ταυτόχρονα από το μηδέν. Εάν η διαφορά φάσης είναι π ή περιττό πολλαπλάσιο του π , τότε προφανώς έχουμε πάλι γραμμική πόλωση, αλλά η συνισταμένη βρίσκεται στο δεύτερο ή τέταρτο τεταρτημόριο (και οι δύο συνιστώσες περνούν ταυτόχρονα από το μηδέν, αλλά όταν η μία συνιστώσα φθάνει στο μέγιστό της, $+A$, η άλλη παίρνει την ελάχιστη τιμή της, $-A$).



Σχήμα 4 Παράσταση του πεδίου \vec{E} που διαδίδεται στον άξονα $+z$. (a) Οι ταλαντώσεις του διανύσματος \vec{E} είναι ισοδύναμες με ταλαντώσεις των συνιστωσών E_x και E_y . (b) Ταλαντώσεις των συνιστωσών με διαφορά φάσης 0° , ή ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , προκαλούν ταλάντωση του \vec{E} στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο. (c) Ταλαντώσεις με διαφορά φάσης π , ή περιττό πολλαπλάσιο του π , παράγουν γραμμικά πολωμένο φως με το διάνυσμα \vec{E} στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο.

Όπως προκύπτει από το Σχήμα 4c, η γωνία α δίνεται από την σχέση

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{E_{oy}}{E_{ox}}\right) \quad (16)$$

Συνήθως τα διανύσματα Jones που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την κατάσταση πόλωσης, έχουν μέτρο ίσο με την μονάδα, δηλ. είναι **κανονικοποιημένα**. Θέτοντας $A=1$, στις εξισώσεις (2.2-13), (2.2-14) και (2.2-15), παίρνουμε τα κανονικοποιημένα διανύσματα Jones, που αντιστοιχούν στις διάφορες καταστάσεις γραμμικής πόλωσης.

- **Κυκλική πόλωση**

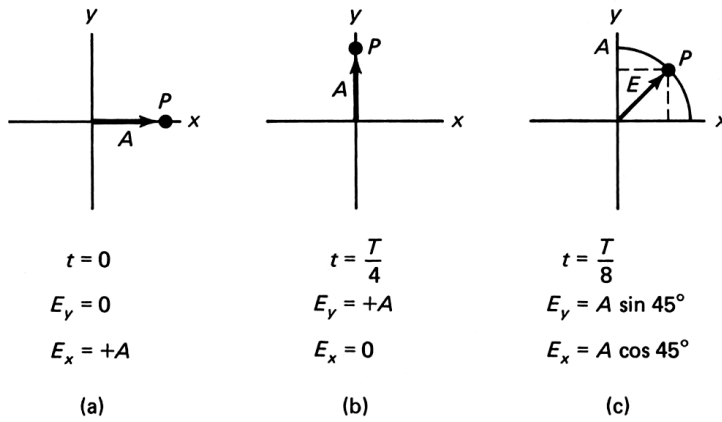
Γενικά, επειδή σημασία στην πρόσθεση των συνιστωσών έχει η διαφορά φάσης και όχι οι απόλυτες τιμές, μπορούμε να θέσουμε

$$\begin{aligned}\phi_x &= 0 \\ \varepsilon &= \phi_y - \phi_x = \phi_y\end{aligned}\quad (17)$$

οπότε ανάλογα με το πρόσημο του ε να γνωρίζουμε ποια συνιστώσα προηγείται. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει καθυστέρηση της αντίστοιχης συνιστώσας. Έτσι έχουμε σύμφωνα με την (12) και την (17)

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x &= E_{ox}e^{-i\omega t} \\ \tilde{E}_y &= E_{oy}e^{-(i\omega t - \varepsilon)}\end{aligned}\quad (18)$$

Όπως προκύπτει και από προσεκτική μελέτη του Σχήματος 5, κυκλική πόλωση της συνισταμένης ταλάντωσης έχουμε όταν η διαφορά φάσης μεταξύ των ορθογώνιων συνιστωσών είναι $\varepsilon = \pi/2$ (ή περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$), και $E_{ox} = E_{oy} = A$.



Σχήμα 5. Ταλαντώσεις του E για ίσα πλάτη και για διαφορά φάσης 90° σε διάφορες χρονικές στιγμές της περιόδου T .

Οπότε από την (18) προκύπτει ότι

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\phi_x} \\ E_{oy}e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\quad (19)$$

Το πλάτος του διανύσματος είναι $1^2 + |i|^2 = 1 + 1 = 2$, άρα κάθε συνιστώσα διαιρείται δια $\sqrt{2}$ για να έχουμε την κανονικοποιημένη μορφή του αντίστοιχου διανύσματος. Έτσι το διάνυσμα Jones για κυκλικά πολωμένο φως είναι

$$\begin{aligned}\tilde{E}_o &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \text{ για αριστερόστροφη κυκλική πόλωση}^5 \\ \tilde{E}_o &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \text{ για δεξιόστροφη κυκλική πόλωση}^6\end{aligned}\quad (20)$$

⁵ η x συνιστώσα καθυστερεί ως προς την y συνιστώσα

⁶ η y συνιστώσα καθυστερεί ως προς την x συνιστώσα

• **Ελλειπτική πόλωση**

Για την περίπτωση του ελλειπτικά πολωμένου φωτός το $E_{ox} \neq E_{oy}$, ενώ η διαφορά φάσης παραμένει ίση με $\varepsilon = \pi/2$ (ή περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$), οπότε το διάνυσμα Jones γίνεται

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} E_{ox} e^{i\phi_x} \\ E_{oy} e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ b e^{i\varepsilon} \end{bmatrix}$$

όπου θέσαμε $\phi_x = 0$, $E_{ox} = A$ και $E_{oy} = b$.

Επειδή

$$b e^{i\varepsilon} = b(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon) = B + iC = b \cos \varepsilon + i b \sin \varepsilon$$

έχουμε

$$\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix} \quad (21)$$

Για να προκύψει κανονικοποιημένο διάνυσμα, πρέπει σε αυτή την περίπτωση να πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία του πίνακα με το $1/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Στην περίπτωση που περιγράψαμε εδώ η y συνιστώσα προηγείται της x συνιστώσας, επομένως πρόκειται για αριστερόστροφα ελλειπτικά πολωμένο φως.

Εν περιλήψει έχουμε

$$\tilde{E}_o = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix} \quad \text{για αριστερόστροφη ελλειπτική πόλωση} \quad (21a)$$

$$\tilde{E}_o = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix} \quad \text{για δεξιόστροφη ελλειπτική πόλωση}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η αιχμή του \tilde{E}_o περιγράφει έλλειψη που δίνεται από την εξίσωση (βλ. Σχήμα 6)

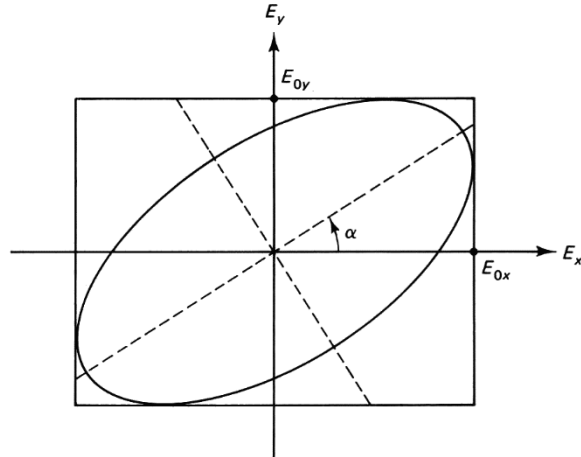
$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{oy}} \right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{ox}} \frac{E_y}{E_{oy}} \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon \quad (22)$$

Η γωνία α που σχηματίζει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης με τον άξονα x δίνεται από τη σχέση

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{ox}E_{oy} \cos \varepsilon}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \quad (23)$$

όπου

$$\begin{aligned} E_{ox} &= A \\ E_{oy} &= \sqrt{B^2 + C^2} \\ \varepsilon &= \tan^{-1} \left(\frac{C}{B} \right) \end{aligned} \quad (24)$$



Σχήμα 6: Ελλειπτικά πολωμένο φως προσανατολισμένο κατά γωνία α ως προς τον άξονα των x

Παράδειγμα: Αναλύστε το διάνυσμα Jones που δίνεται από τον πίνακα $\begin{bmatrix} 3 \\ 2+i \end{bmatrix}$ για να δείξετε ότι είναι ελλειπτικά πολωμένο.

Έχουμε από την (21), την (23) και την (24) ότι

$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{C}{B}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.6^\circ$$

$$E_{ox} = 3, E_{oy} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2E_{ox}E_{oy} \cos \varepsilon}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} = 35.8^\circ$$

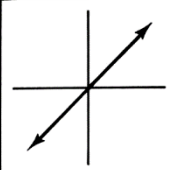
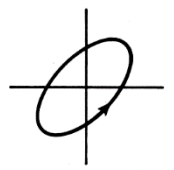
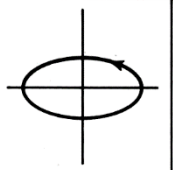
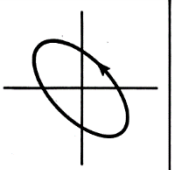
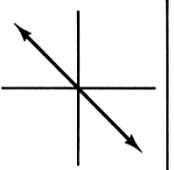
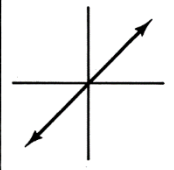
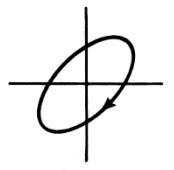
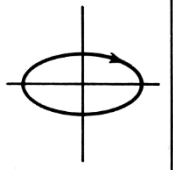
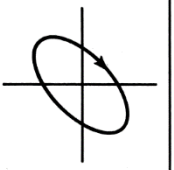
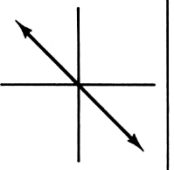
Επακριβώς η έλλειψη περιγράφεται (σύμφωνα με την 22) από την σχέση

$$\frac{E_x^2}{9} + \frac{E_y^2}{5} - 0.267E_xE_y = 0.2$$

Στην πραγματικότητα και η γραμμική πόλωση και η κυκλική πόλωση είναι ειδικές περιπτώσεις της ελλειπτικής πόλωσης, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 7, στο οποίο δίνονται τα γνωστά σχήματα Lissajous⁷, συναρτήσει της διαφοράς φάσης $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$, για την γενική περίπτωση που $E_x \neq E_y$.

Στον Πίνακα 1 δίνεται ένας κατάλογος των διανυσμάτων Jones για γραμμικά, κυκλικά και ελλειπτικά πολωμένο φως για δεξιόστροφη και αριστερόστροφη κίνηση του διανύσματος της πόλωσης

⁷ που προκύπτουν από την σύνθεση των ορθογώνιων συνιστωσών για να πάρουμε την συνισταμένη ταλάντωση

| | | | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |  |
| $\Delta\phi = 0^\circ$ | $\Delta\phi = 45^\circ$ | $\Delta\phi = 90^\circ$ | $\Delta\phi = 135^\circ$ | $\Delta\phi = 180^\circ$ |
|  |  |  |  |  |
| $\Delta\phi = 360^\circ$ | $\Delta\phi = \begin{cases} -45^\circ \\ 315^\circ \end{cases}$ | $\Delta\phi = \begin{cases} -90^\circ \\ 270^\circ \end{cases}$ | $\Delta\phi = \begin{cases} -135^\circ \\ 225^\circ \end{cases}$ | $\Delta\phi = \pm 180^\circ$ |

Σχήμα 7. Σχήματα Lissajous για συγκεκριμένες διαφορές φάσης, $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$, των συνιστωσών E_x και E_y για τη γενική περίπτωση $E_{ox} \neq E_{oy}$. Για $E_{ox} = E_{oy}$ έχουμε κύκλο αντί για έλλειψη.

Ασκήσεις-Ερωτήσεις Θεωρίας

- Αποδείξτε τις σχέσεις 22, 23, και 24.
- Γράψτε τα κανονικοποιημένα διανύσματα Jones για τα ακόλουθα κύματα και περιγράψτε πλήρως την κατάσταση πόλωσης στην κάθε περίπτωση.

(α) $\vec{E} = \hat{i}E_o \cos(kz - \omega t) - \hat{j}E_o \cos(kz - \omega t)$

(β) $\vec{E} = \hat{i}E_o \sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - ft\right) + \hat{j}E_o \sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - ft\right)$

(γ) $\vec{E} = \hat{i}E_o \cos(kz - \omega t) + \hat{j}E_o \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})$

- Περιγράψτε πλήρως την κατάσταση πόλωσης των ακόλουθων κυμάτων (συμπεριλάβετε και το πλάτος και την διεύθυνση διάδοσης)

(α) $\vec{E} = 2E_o \hat{i} e^{i(kz - \omega t)}$

(β) $\vec{E} = E_o (3\hat{i} + 4\hat{j}) e^{i(kz - \omega t)}$

(γ) $\vec{E} = 5E_o (\hat{i} - \hat{j}) e^{i(kz + \omega t)}$

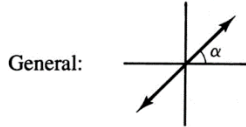
(Προσέξτε την διαφορά μεταξύ του μοναδιαίου διανύσματος \hat{i} και του φανταστικού αριθμού $i = \sqrt{-1}$).

- Ποιά είναι η κατάσταση πόλωσης που περιγράφεται από τα ακόλουθα διανύσματα Jones:

(α) $\begin{bmatrix} 3i \\ i \end{bmatrix}$, (β) $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, (γ) $\begin{bmatrix} 4i \\ 5 \end{bmatrix}$, (δ) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, (ε) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2i \end{bmatrix}$, (στ) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, (ζ) $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 + 8i \end{bmatrix}$, (η) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3e^{i\pi/3} \end{bmatrix}$

Πίνακας 1. Περίληψη διανυσμάτων Jones

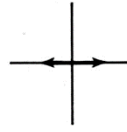
I. Linear Polarization ($\Delta\phi = m\pi$)



$$E_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

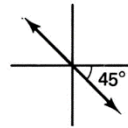
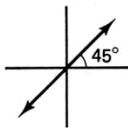
Vertical: $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Horizontal: $E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

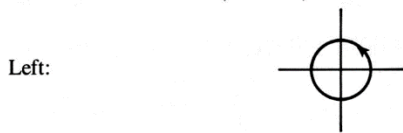


At $+45^\circ$: $E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

At -45° : $E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



II. Circular Polarization ($\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$)

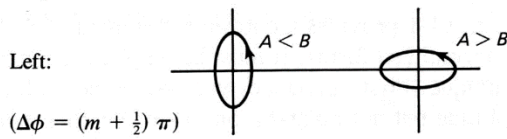


$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

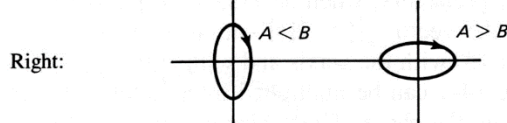


$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

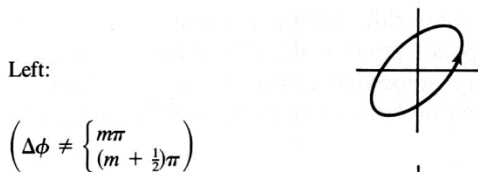
III. Elliptical Polarization



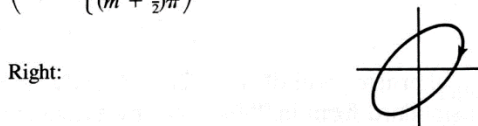
$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ iB \end{bmatrix}$$



$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ -iB \end{bmatrix}$$



$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$$



$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix}$$

2.3 Μαθηματική αναπαράσταση πολωτικών στοιχείων – πίνακες Jones

Υπάρχουν διάφορα οπτικά στοιχεία που επιτρέπουν την διάδοση του φωτός μέσα από αυτά, μεταβάλλοντας, όμως, την κατάσταση πόλωσής του. Οι φυσικοί μηχανισμοί που υφίστανται στην δράση αυτών των οπτικών στοιχείων θα εξεταστούν στο επόμενο κεφάλαιο. Εδώ, απλώς θα κατατάξουμε τα συστήματα αυτά σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το είδος της μεταβολής που προκαλούν στην κατάσταση πόλωσης του διαρχομένου φωτός:

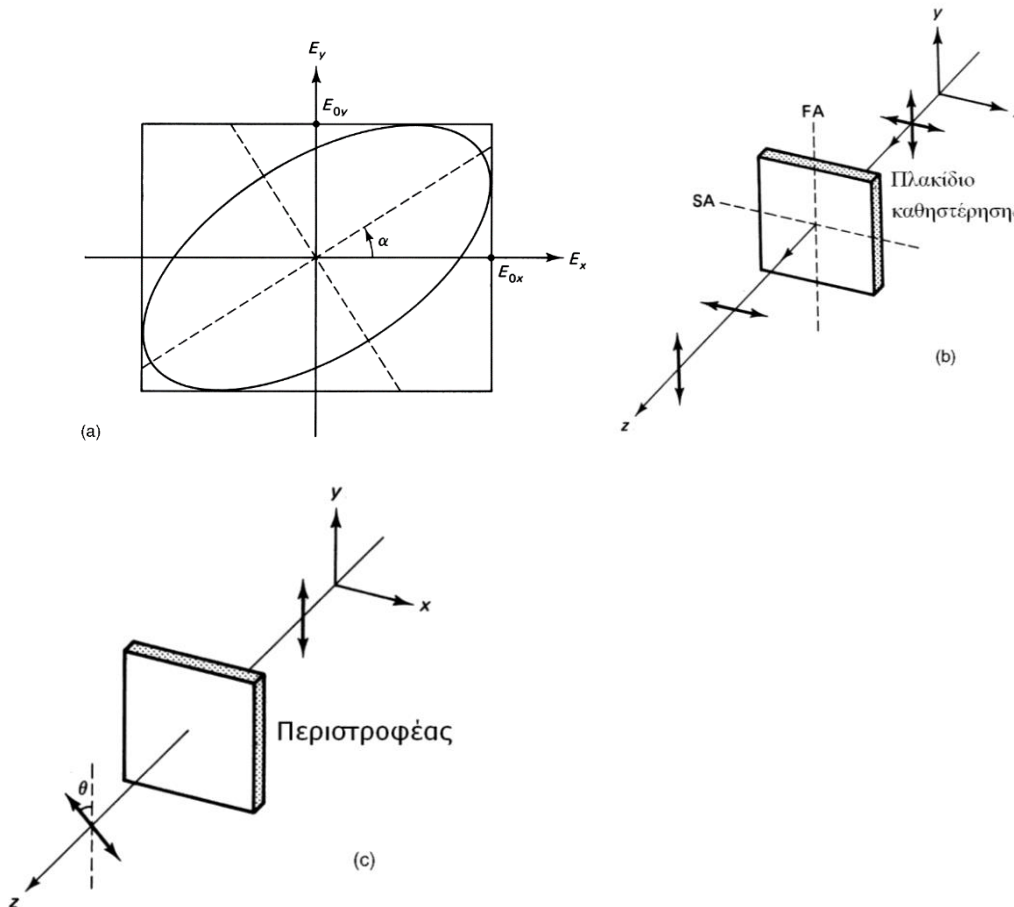
(i) **Γραμμικός Πολωτής (linear polarizer):** επιτρέπει μόνο την διέλευση φωτός που είναι πολωμένο παράλληλα προς τον λεγόμενο άξονα διέλευσης (Transmission Axis, TA). Βλ. Σχήμα 8a.

(ii) **Πλακίδιο καθυστέρησης (retarder):** εισάγει διαφορά φάσης μεταξύ των συνιστωσών E_{ox} και E_{oy} . Τα εν λόγω πλακίδια έχουν δύο άξονες, έναν κανονικό (FA, fast axis) και ένα μη κανονικό (SA, slow axis) λόγω διαφοράς του δείκτη διάθλασης στους δύο άξονες. Το πλακίδιο που προκαλεί διαφορά φάσης $\Delta\phi=90^\circ$ αποκαλείται **πλακίδιο $\lambda/4$** και αυτό που προκαλεί διαφορά φάσης $\Delta\phi=180^\circ$ ονομάζεται **πλακίδιο $\lambda/2$** . Βλ. Σχήμα 8b.

Οι ονομασίες αυτές οφείλονται στο ότι η συνολική διαφορά φάσης μεταξύ των E_{ox} και E_{oy} εξαρτάται από το πάχος του πλακιδίου d

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{ αν } d = \frac{\lambda}{4}, \text{ τότε } \Delta\phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \text{ αν } d = \frac{\lambda}{2}, \text{ τότε } \Delta\phi = \pi = 180^\circ \quad (25)$$

(iii) **Περιστροφέας (rotator):** είναι μία συσκευή που περιστρέφει το επίπεδο ταλάντωσης γραμμικά πολωμένου φωτός κατά μία συγκεκριμένη γωνία Βλ. Σχήμα 8c.



Σχήμα 8: Σχηματική απεικόνιση της δράσης (a) γραμμικού πολωτή, (b) πλακιδίου καθυστέρησης, και (c) περιστροφέα.

Θέλουμε, τώρα, να περιγράψουμε μαθηματικά έναν πολωτή στα πλαίσια του φορμαλισμού που εφαρμόσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Είναι προφανές ότι χρειαζόμαστε κατάλληλους πίνακες (2x2), που όταν επιδράσουν σε ένα διάνυσμα Jones (2x1) του πολωμένου φωτός (πολλαπλασιασμός πινάκων) θα επιφέρουν το αναμενόμενο αποτέλεσμα, δηλ. ένα διάνυσμα Jones που θα περιγράφει σωστά την προκύπτουσα κατάσταση πόλωσης.

• **Γραμμικός πολωτής**

Έστω κατακόρυφα γραμμικά πολωμένο φως που διέρχεται από ένα γραμμικό πολωτή με άξονα διέλευσης (ΑΔ) επίσης κατακόρυφο. Προφανώς περιμένουμε το φως να διέλθει χωρίς καμία μεταβολή στην κατάσταση πόλωσης του. Επομένως, ο πίνακας του πολωτή αυτού θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Οι αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν είναι

$$b=0 \text{ και } d=1.$$

Αν τώρα προσπέσει οριζόντια γραμμικά πολωμένο φως στον ίδιο γραμμικό πολωτή, δεν θα διέλθει καθόλου φως και θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

συνεπώς

$$a=0 \text{ και } c=0.$$

Επομένως, ο πίνακας για ένα πολωτή με τον άξονα διέλευσης κατακόρυφο είναι

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ γραμμικός πολωτής με κατακόρυφο ΑΔ (ΤΑ)}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στην γενική περίπτωση γραμμικού πολωτή με ΑΔ να σχηματίζει μία τυχαία γωνία θ με τον άξονα των x .

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

• **Πλακίδια Καθυστέρησης**

Στην περίπτωση των πλακιδίων καθυστέρησης, ζητάμε ένα πίνακα που να μετατρέπει το $E_{0x}e^{i\phi_x}$ σε $E_{0x}e^{i\phi_x + \varepsilon_x}$ και το $E_{0y}e^{i\phi_y}$ σε $E_{0y}e^{i\phi_y + \varepsilon_y}$.

Είναι προφανές ότι ένας τέτοιος πίνακας θα έχει την γενική μορφή

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} \quad (29)$$

ούτως ώστε

$$\begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0y}e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i(\phi_x + \varepsilon_x)} \\ E_{0y}e^{i(\phi_y + \varepsilon_y)} \end{bmatrix}$$

που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα. Είναι κατανοητό ότι τα ε_x και ε_y μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές ποσότητες. Παραδείγματος χάρη, ας εξετάσουμε την περίπτωση ενός πλακιδίου $\lambda/4$, για το οποίο $|\Delta\varepsilon| = \pi/2$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, όταν $\varepsilon_y - \varepsilon_x = \pi/2$ (όταν ο άξονας βραδείας

διέλευσης $-AB\Delta$ - είναι κατακόρυφος), και όταν $\varepsilon_x - \varepsilon_y = \pi/2$ (όταν ο $AB\Delta$ είναι οριζόντιος). Στην πρώτη περίπτωση, $\varepsilon_x = -\pi/4$ και $\varepsilon_y = +\pi/4$. Φυσικά υπάρχει άπειρος αριθμός τιμών που δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, δηλ. ο πίνακας Jones που περιγράφει ένα συγκεκριμένο πολωτή δεν είναι μοναδικός (όπως συμβαίνει και με τα διανύσματα Jones). Για την συγκεκριμένη επιλογή τιμών των ε_x και ε_y , έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

$$M = \begin{bmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{πλακίδιο } \lambda/4, AB\Delta \text{ κατακόρυφος} \quad (30)$$

Όμοια, όταν $\varepsilon_x > \varepsilon_y$,

$$M = e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{πλακίδιο } \lambda/4, AB\Delta \text{ οριζόντιος} \quad (31)$$

Αντίστοιχους πίνακες μπορούμε εύκολα να γράψουμε για πλακίδια $\lambda/2$, $\lambda/8$ κ.ο.κ. (βλ. Πίνακα 2).

• Περιστροφείς

Ένας περιστροφέας στρέφει το επίπεδο πόλωσης γραμμικά πολωμένου φωτός από μία αρχική γωνία, έστω θ , στην γωνία $\theta+\beta$. Δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \beta) \\ \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix}$$

συνεπώς,

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= \cos(\theta + \beta) \\ c \cos \theta + d \sin \theta &= \sin(\theta + \beta) \end{aligned}$$

οπότε, τελικά

$$M = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad \text{για περιστροφή γωνίας } \beta \quad (32)$$

Πίνακας 2. Πίνακες Jones για γραμμικούς πολωτές, πλακίδια καθυστέρησης και περιστροφής.

I. Linear polarizers

$$\text{TA horizontal} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{TA vertical} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{TA at } 45^\circ \text{ to horizontal} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

II. Phase retarders

$$\begin{array}{l} \text{General} \begin{bmatrix} e^{i\epsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_y} \end{bmatrix} \\ \text{QWP, SA vertical} \quad e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{QWP, SA horizontal} \quad e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ \text{HWP, SA vertical} \quad e^{-i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{HWP, SA horizontal} \quad e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

III. Rotator

$$\text{Rotator} \quad (\theta \rightarrow \theta + \beta) \quad \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται περισσότερα του ενός πολωτικά στοιχεία, το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες των στοιχείων κατά την σειρά που έρχονται σε επαφή με τη δέσμη του φωτός. Δηλ. αν ένα διάνυσμα Jones V διέρχεται κατά σειρά από πολωτές που περιγράφονται από τους πίνακες M_1, M_2, \dots, M_m , τότε $(M_m \dots M_2 M_1)V = M_S V$.

Παράδειγμα: Αριστερόστροφο κυκλικά πολωμένο φως διέρχεται από πλακίδιο $\lambda/8$. Να βρεθεί το νέο διάνυσμα στην έξοδο πλακιδίου.

Η καθυστέρηση φάσης που επιβάλει το πλακίδιο είναι

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Σύμφωνα με τον γενικό πίνακα για το πλακίδιο καθυστέρησης έχουμε

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\epsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_y} \end{bmatrix}$$

όπου ϵ_x είναι η αλλαγή που προκαλείται στο ϕ_x και ϵ_y είναι η αλλαγή που προκαλείται στο ϕ_y . Αν θεωρήσουμε $\epsilon_x=0$ τότε η $\epsilon_y=45^\circ$ αντιστοιχεί στη σχετική διαφορά φάσης. Άρα

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

Το αριστερόστροφο κυκλικά πολωμένο φως δίνεται από το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Άρα έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ ie^{i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i3\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \end{bmatrix}$$

που δηλώνει ότι έχουμε ένα ελλειπτικά πολωμένο φως. Από τις (21), (22) και την (23) έχουμε

$M = \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$ με $A=1$, $B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $E_{ox} = A = 1$, $E_{oy} = \sqrt{B^2 + C^2} = 1$ και $a = -45^\circ$
(όπου a είναι η γωνία του μεγάλου άξονα της έλλειψης με τον άξονα x).

Ασκήσεις-Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Γραμμικά πολωμένο φως του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία $+30^\circ$ με τον άξονα των x , διαδίδεται μέσω ενός πλακιδίου $\lambda/4$ με οριζόντιο τον άξονα βραδείας διάδοσης. Περιγράψτε την κατάσταση πόλωσης του προκύπτοντος κύματος.
2. Δείξτε ότι η επίδραση ενός πλακιδίου $\lambda/2$ σε γραμμικά πολωμένο φως κατά γωνία a , είναι η στροφή του επιπέδου πόλωσης κατά $2a$.
3. Οριζόντια γραμμικά πολωμένο φως περνά από γραμμικό πολωτή που σχηματίζει γωνία $+45^\circ$ (κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού) με την κατακόρυφο, και εν συνεχεία περνά από πλακίδιο $\lambda/4$ με οριζόντιο άξονα βραδείας διάδοσης. Ποιά η κατάσταση πόλωσης του προκύπτοντος κύματος.
4. Πώς μεταβάλλεται η κατάσταση πόλωσης κυκλικά πολωμένου φωτός όταν περάσει (α) από πλακίδιο $\lambda/4$, (β) από πλακίδιο $\lambda/8$.

2.4 Παραγωγή πολωμένου φωτός

Οποιαδήποτε αλληλεπίδραση του φωτός με ύλη της οποίας οι οπτικές ιδιότητες δεν είναι συμμετρικές εγκάρσια προς τον άξονα διάδοσης του κύματος, αποτελεί ένα μέσο παραγωγής πολωμένου φωτός.

Οι πιο σημαντικές φυσικές διαδικασίες που προκαλούν πόλωση είναι οι εξής:

- πόλωση λόγω επιλεκτικής απορρόφησης - *Διχρωισμός*
- πόλωση λόγω ανάκλασης από μια διηλεκτρική επιφάνεια
- πόλωση λόγω σκέδασης (που δεν εξετάζετε στο πείραμά σας)
- πόλωση λόγω ύπαρξης δύο δεικτών διάθλασης - *Διπλοθλαστικότητα*

Σε ξεχωριστό κεφάλαιο θα εξετασθεί η *οπτική ενεργότητα*, με την οποία μπορούμε μόνο να αλλάξουμε την κατάσταση πόλωσης *ήδη* πολωμένου φωτός.

• Πόλωση λόγω επιλεκτικής απορρόφησης - Διχρωισμός

Ένας διχρωικός πολωτής απορροφά επιλεκτικά φως που έχει πόλωση σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση και επιτρέπει τη διέλευση φωτός στην κάθετη διεύθυνση που αποκαλείται και *Άξονας Διάδοσης* (ΑΔ) του πολωτή [*Transmission Axis* (TA)]. Σε ένα ιδανικό πολωτή το προκύπτον φως είναι γραμμικά πολωμένο κατά την διεύθυνση ΑΔ (TA). Συνήθως, χρησιμοποιούμε δύο πολωτές σε σειρά, ένα για να πολώσουμε (πολωτής) και ένα για να αναλύσουμε το πολωμένο φως (αναλυτής). Η ένταση του φωτός που διέρχεται από τον αναλυτή ακολουθεί το νόμο του Malus

$$I(\theta) = I_o \cos^2 \theta \quad (33)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι ΑΔ (TA) των δύο πολωτών, και I_o η μέγιστη διερχόμενη ένταση.

Οι πολωτές αποτελούνται από μακρομόρια, τα οποία είναι διατεταγμένα παράλληλα προς μια κατεύθυνση. Ο πιο γνωστός διχρωικός απορροφητής για το ορατό φως είναι το γνωστό Polaroid Η-φίλμ, που εφευρέθηκε το 1938 από τον E.H. Land, ο οποίος παρατήρησε ότι όταν ένα διαφανές φύλλο πολυβινυλικής αλκοόλης θερμανθεί κάτω από εφελκυσμό, τα μακρά μόρια της ένωσης τείνουν να ευθυγραμμισθούν κατά την κατεύθυνση του εφελκυσμού. Στα ευθυγραμμισμένα μόρια εμφυτεύονται κατόπιν άτομα ιωδίου τα οποία παρέχουν ένα είδος "ελεύθερων ηλεκτρονίων" στο ευθυγραμμισμένο μόριο, δημιουργώντας έτσι ένα επίπεδο με ευθυγραμμισμένες μικρές βελόνες αγωγιμότητας. Επειδή τώρα τα ηλεκτρόνια μπορούν να κινηθούν μόνο προς μια κατεύθυνση, υπό την επίδραση ενός πεδίου με τυχαία πόλωση, το συνιστάμενο

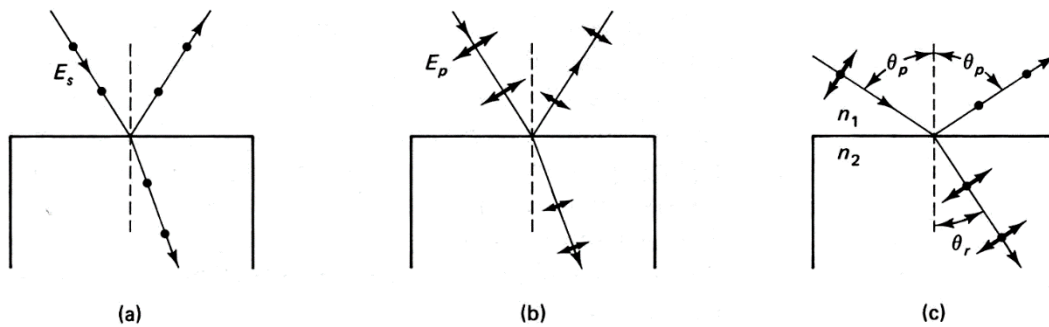
εκπεμπόμενο κύμα μακριά από το επίπεδο θα έχει -όπως αποδεικνύεται από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία- πόλωση παράλληλη προς την κατεύθυνση των μακρομορίων. Η κάθετη προς την κατεύθυνση αυτή συνιστώσα δεν διαδίδεται, αλλά "απορροφάται" σύμφωνα με το νόμο

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (33^a)$$

όπου το α είναι ο συντελεστής απορρόφησης και x το πάχος του πολωτή. Ένας καλός πολωτής έχει το α σχεδόν ανεξάρτητο του μήκους κύματος. Το γνωστό φύλλο Polaroid H είναι λιγότερο αποτελεσματικό για το ιώδες, όσον αφορά την απορρόφηση α και γι' αυτό το φως μετά τον αναλυτή εμφανίζει μια ιώδη απόχρωση στην περίπτωση πόλωσης και ανάλυσης πηγής που εκπέμπει σε όλο το ορατό φάσμα.

• **Πόλωση λόγω ανάκλασης από διηλεκτρική επιφάνεια**

Για να εξηγήσουμε τι συμβαίνει κατά την ανάκλαση φωτός από μια επιφάνεια, ας θεωρήσουμε το Σχήμα 9. Μια μη πολωμένη δέσμη μπορεί να αναπαρασταθεί από δύο ορθογώνιες συνιστώσες, εκ των οποίων η μία είναι κάθετη στο επίπεδο πρόσπτωσης (που ορίζεται από την διεύθυνση διάδοσης της δέσμης και την κάθετο στην επιφάνεια), που στο σχήμα 9 συμπίπτει με το επίπεδο της σελίδας και η άλλη είναι παράλληλη προς το επίπεδο αυτό. Η πρώτη συνιστώσα συμβολίζεται με E_s και η δεύτερη με E_p . Η E_s , αντιστοιχεί σ' αυτό που ονομάζεται *Transverse Electric (TE) mode*, επειδή στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης. Η E_p , αντιστοιχεί σε ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο προς το επίπεδο πρόσπτωσης, οπότε το μαγνητικό πεδίο είναι τώρα κάθετο στο επίπεδο αυτό, εξ ου και ο όρος *Transverse Magnetic (TM) mode*.



Σχήμα 9. Ανάκλαση του φωτός από μια διηλεκτρική επιφάνεια. (a) TE mode, (b) TM mode και (c) πόλωση σε γωνία Brewster.

Η ερμηνεία του φαινομένου της πόλωσης από ανάκλαση από διηλεκτρική επιφάνεια, συνδέεται με την παρουσία ηλεκτρονίων στο υλικό, τα οποία ανταποκρινόμενα στην προσπίπτουσα ακτινοβολία, εκπέμπουν ως δίπολα, δηλ. μόνο κάθετα στον άξονα κίνησης τους, και με πόλωση παράλληλη προς αυτόν τον άξονα.

Η συνεισφορά των συνιστωσών E_s και E_p φαίνεται στο Σχήμα 9(a) και (b). Η ένταση της ανακλώμενης δέσμης είναι συνάρτηση της γωνίας θ_p , που σχηματίζει η προσπίπτουσα δέσμη με την κάθετο στη επιφάνεια, διότι τα ηλεκτρόνια κινούνται μόνο παράλληλα προς την επιφάνεια του υλικού και δεν μπορούν να εξέλθουν από αυτό. Άρα, όσο αυξάνει η γωνία θ_p , τόσο η προβολή της E_p πάνω στην επιφάνεια μικραίνει, με αποτέλεσμα η συνεισφορά της στην ανάκλαση να ελαττώνεται. Το συμπέρασμα είναι ότι ενώ η συνεισφορά της συνιστώσας E_s δεν εξαρτάται από τη γωνία, η συνεισφορά της E_p εξαρτάται. Έτσι, μόνο ένα μέρος της συνιστώσας E_p θα εμφανισθεί στην ανακλώμενη δέσμη. Επειδή, λοιπόν, η ανακλώμενη δέσμη είναι κυρίως TE, η διαθλώμενη δέσμη θα είναι κυρίως TM, εφόσον το άθροισμά τους θα πρέπει να δίνει την αρχική δέσμη.

Είναι φανερό από την ανάλυση που προηγήθηκε, ότι όταν οι άξονες των διπόλων είναι παράλληλοι προς την ανακλώμενη ακτίνα, τότε η ανακλώμενη ακτίνα θα είναι γραμμικά πολωμένη (περιέχοντας μόνο την συνιστώσα E_s). Αυτός ο μοναδικός προσανατολισμός προκύπτει όταν η ανακλώμενη και η διαθλώμενη δέσμη είναι κάθετες μεταξύ τους. Η γωνία πρόσπτωσης θ_p , για την οποία συμβαίνει αυτό λέγεται *γωνία πόλωσης* ή *γωνία Brewster* (σχήμα 9c).

Από το νόμο του Snell

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin \theta_r \quad (34)$$

και τη σχέση

$$\theta_r = 90 - \theta_p$$

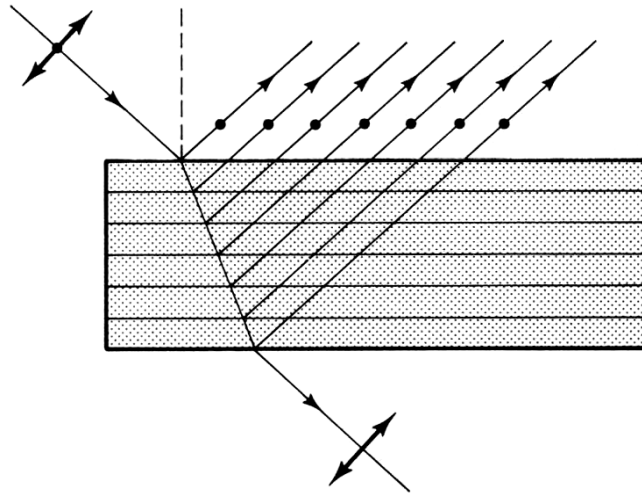
έχουμε για τη γωνία Brewster

$$\theta_p = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1} \quad (35)$$

Γωνία Brewster υπάρχει και όταν το φως ταξιδεύει από το υλικό με τον μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης προς το υλικό με τον μικρότερο δείκτη, όπως μπορεί ναδειχθεί εύκολα, και είναι συμπληρωματική της γωνίας Brewster που προκύπτει όταν το φως ταξιδεύει αντίστροφα, δηλ. από το υλικό με τον μικρότερο δείκτη διάθλασης προς το υλικό με τον μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης⁸.

Η μέθοδος της πόλωσης από ανάκλαση δεν είναι πολύ αποδοτική, όταν χρησιμοποιείται ένα μόνο πλακίδιο, γιατί η ανακλώμενη είναι περίπου το 15% της προσπίπτουσας έντασης. Για να αυξήσουμε την ένταση χρησιμοποιούμε μια σειρά από πλακίδια τα οποία συνεισφέρουν στην ανάκλαση. Λεπτά φιλμ από διηλεκτρικό μπορούν επίσης να παίξουν το ρόλο των πλακιδίων και επειδή τόσο το πάχος όσο και ο δείκτης διάθλασης των φιλμ μπορεί να ελεγχθεί πειραματικά, μπορεί να κατασκευασθεί επίστρωση πολλών στρωμάτων, που μπορεί να δώσει ένα σχεδόν τέλειο πολωτή. Στο Σχήμα 10 παρατηρούμε μια τέτοια συσκευή πολλών επιστρώσεων.

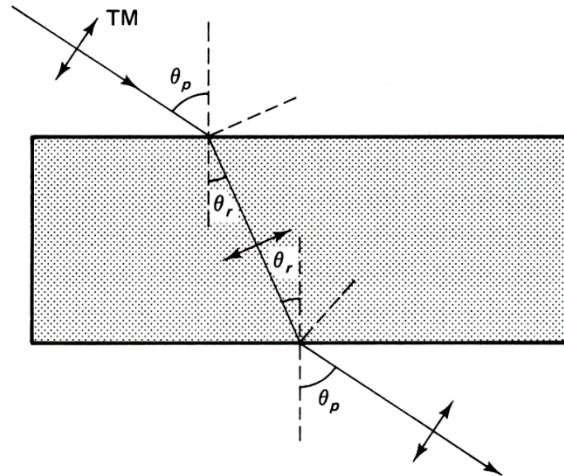
Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της πόλωσης από ανάκλαση είναι το λεγόμενο *παράθυρο Brewster* (Σχήμα 11), το οποίο λειτουργεί σαν ένα από τα πλακίδια του σχήματος 10. Όταν πολωμένο φως TM προπίπτει υπό την γωνία Brewster στο πλακίδιο θα περάσει ολόκληρη από την πρώτη επιφάνεια., και θα προσπέσει υπό γωνία θ_r στην δεύτερη επιφάνεια, όπου επίσης ικανοποιείται η σχέση 2.4-2, επομένως και πάλι θα διέλθει ανέπαφη η δέσμη.



Σχήμα 10. Πολωτής αποτελούμενος από επιστρώσεις ανακλαστικών φιλμ

Τα παράθυρα Brewster βρίσκουν εφαρμογή στις οπτικές κοιλότητες των laser, όπου το ενεργό υλικό περιορίζεται σε πολλές περιπτώσεις από δύο τέτοια παράθυρα, στα άκρα. Το φως μέσα στην οπτική κοιλότητα διέρχεται κατ'επανάληψη από τα παράθυρα, καθώς διαδίδεται από και προς τα κάτοπτρα στα άκρα του laser (βλ. αντίστοιχο κεφάλαιο). Κάθε φορά η συνιστώσα TM διέρχεται πλήρως, ενώ η συνιστώσα TE ανακλάται μερικώς (δηλ. απορρίπτεται από την δέσμη). Μετά από πολλές τέτοιες διελεύσεις, η τελική δέσμη είναι σχεδόν τέλεια πολωμένη κατά TM.

⁸ όπως απαιτείται από τη γεωμετρία και τον ορισμό της γωνίας Brewster.



Σχήμα 11. Παράθυρο Brewster. Ο νόμος Brewster ικανοποιείται και στις δύο επιφάνειες για το TM mode.

- **Πόλωση λόγω διπλοθλαστικότητας**

Διπλοθλαστικά ονομάζονται τα υλικά που έχουν δύο δείκτες διάθλασης, ανάλογα με την κατεύθυνση της δέσμης σχετικά με τον οπτικό άξονα του υλικού. Αυτό βασικά οφείλεται στην ανισοτροπία των δυνάμεων που συγκρατούν τα ηλεκτρόνια ενός κρυστάλλου.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση του ασβεστίτη ($CaCO_3$) για να αντιληφθούμε το φαινόμενο. Το μόριο του ασβεστίτη έχει ένα τετραεδρικό πυραμιδοειδές σχήμα. Το Σχήμα 13 δείχνει ένα τέτοιο μόριο που περιβάλλεται από ίδια τετράεδρα ομοίως τοποθετημένα. Τα άτομα του οξυγόνου αποτελούν τις κορυφές του τριγώνου βάσης με τον άνθρακα στο κέντρο του ισοσκελούς τριγώνου. Το Ca βρίσκεται στην κορυφή της πυραμίδας. Στο Σχήμα 13 φαίνεται και η κατεύθυνση διάδοσης μιας μη πολωμένης δέσμης, που μπορεί να αναπαρασταθεί από τις δύο κάθετες μεταξύ τους

Συνιστώσες πόλωσης. Πρώτα ας θεωρήσουμε φως που εισέρχεται στον κρύσταλλο από το επίπεδο βάσης που καθορίζουν τα άτομα του οξυγόνου. Λόγω συμμετρίας οι συνιστώσες του πεδίου αλληλεπιδρούν με τα ηλεκτρόνια με ταλαντώσεις της ίδιας μορφής. Η κατεύθυνση αυτή της συμμετρίας ονομάζεται *οπτικός άξονας* (OA) του κρυστάλλου. Ας θεωρήσουμε τώρα μια δέσμη εισερχόμενη από τα αριστερά του κρυστάλλου. Εδώ οι δύο συνιστώσες προκαλούν ταλαντώσεις στα ηλεκτρόνια των ατόμων της βάσης είτε στο επίπεδο, είτε κάθετα σ' αυτό οι οποίες φυσικά δεν έχουν το ίδιο πλάτος. Η E_{\parallel} που είναι παράλληλη στον OA προκαλεί ταλαντώσεις κάθετες στο επίπεδο βάσης (τα αντίστροφα συμβαίνουν για την E_{\perp}), όπου τα ηλεκτρόνια τείνουν να βρίσκονται λόγω του χημικού δεσμού στο επίπεδο της βάσης και άρα η ταλάντωση είναι ευκολότερη. Η διαφοροποίηση ως προς την ευκολία κίνησης των ηλεκτρονίων στο επίπεδο της βάσης και στο κάθετο σ' αυτό επίπεδο, μεταφράζεται σε διαφοροποίηση της επιτάχυνσης των ηλεκτρονίων στα αντίστοιχα δίπολα και εν συνεχεία σε διαφοροποίηση της έντασης του πεδίου που προκαλείται από τα δίπολα στις δύο κατευθύνσεις. Η κάθετη στον OA συνιστώσα του πεδίου αλληλεπιδρά περισσότερο δραστικά με τα ηλεκτρόνια του επιπέδου τριγώνου της βάσης. Η συνέπεια είναι να έχουμε μειωμένη ταχύτητα διέλευσης γι' αυτή τη δέσμη, δηλαδή $v_{\perp} < v_{\parallel}$. Αυτό σημαίνει $n_{\perp} > n_{\parallel}$, επειδή $n = c/v$. Οι μετρηθείσες τιμές δεικτών διάθλασης για τον ασβεστίτη είναι $n_{\perp} = 1.658$ και $n_{\parallel} = 1.486$ για $\lambda = 589.3nm$. Το μόριο του ασβεστίτη έχει μια τριπλή συμμετρία περιστροφής γύρω από τον οπτικό άξονα. Τέτοια υλικά έχουν ένα μόνο οπτικό άξονα και λέγονται μονοαξονικά διπλοθλαστικά υλικά (uniaxial birefringent). Επιπλέον, αν $n_{\parallel} - n_{\perp} > 0$ αποκαλούνται θετικά και στην αντίθετη περίπτωση, αρνητικά. Ένας διπλοθλαστικός κρύσταλλος μπορεί να κοπεί με τον οπτικό του άξονα προς διάφορες κατευθύνσεις σε σχέση με το επίπεδο απ' όπου εισέρχεται η ακτίνα. Στο Σχήμα 14 φαίνεται μια τέτοια διάταξη με τον OA σε τρεις διαφορετικές κατευθύνσεις.

Έστω μη πολωμένο φως, το οποίο προσπίπτει κατά την οριζόντια διεύθυνση στα πλακίδια του σχήματος. Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το φως αυτό με δύο ορθογώνιες συνιστώσες, την μία παράλληλη και την άλλη κάθετη προς τον οπτικό άξονα. Στην περίπτωση (α), και οι

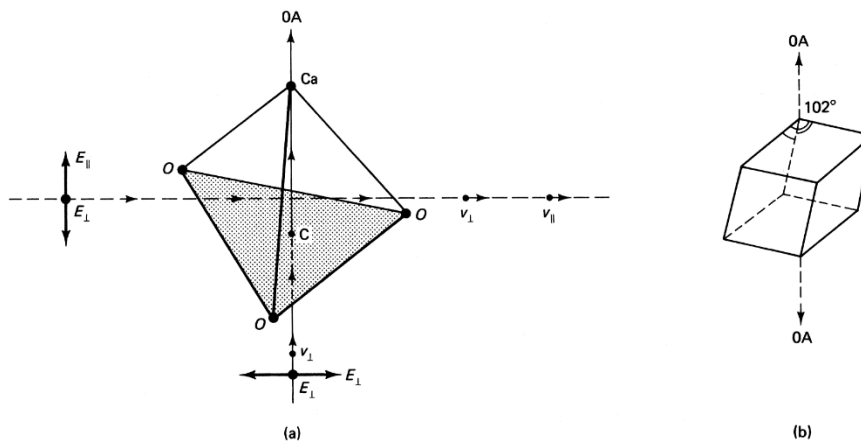
δύο αντιπροσωπευτικές συνιστώσες είναι κάθετες στον OA (η μία –που δεν φαίνεται στο σχήμα- είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας), επομένως διαδίδονται στον κρύσταλλο με τον ίδιο δείκτη διάθλασης n_{\perp} . Αντίθετα, στις περιπτώσεις (b) και (c), μία από τις δύο συνιστώσες είναι παράλληλη προς τον OA και η άλλη είναι κάθετη, επομένως διαδίδονται με διαφορετική ταχύτητα (διαφορετικό δείκτη διάθλασης).

Συνεπώς, εισάγεται μία διαφορά στους αντίστοιχους οπτικούς δρόμους. Για κρύσταλλο πάχους d η διαφορά των οπτικών δρόμων είναι

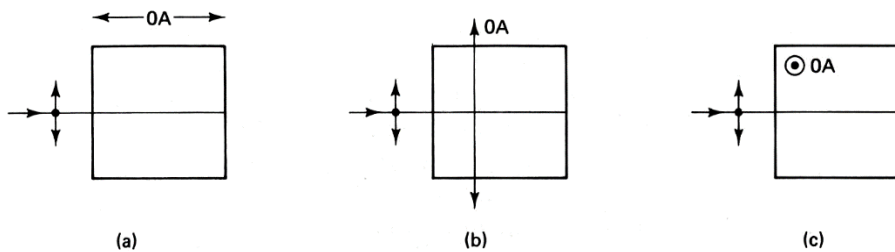
$$\Delta = |n_{\perp} - n_{\parallel}|d \quad (36)$$

και η αντίστοιχη διαφορά φάσης

$$\Delta\phi = \frac{2\pi|\Delta|}{\lambda_o} = \frac{2\pi}{\lambda_o}|n_{\perp} - n_{\parallel}|d \quad (37)$$



Σχήμα 13. (a) Διάδοση του φωτός μέσα από ένα κρύσταλλο ασβεστίτη. Τα τρία άτομα του οξυγόνου σχηματίζουν τη βάση του τετραέδρου του μορίου. Ο οπτικός άξονας είναι παράλληλος στην ευθεία που ενώνει τα άτομα C και Ca. (b) Το ρομβόεδρο του ασβεστίτη. Φαίνεται ο οπτικός άξονας ο οποίος διέρχεται από τις λιγότερο αιχμηρές κορυφές, όπου οι τρεις γωνίες των πλευρών είναι ίσες με 102° εκάστη.



Σχήμα 14. Το φως εισέρχεται σε ένα διπλοθλαστικό κρύσταλλο του οποίου ο οπτικός άξονας έχει διαφορετικές κατευθύνσεις σε σχέση με την διεύθυνση διάδοσης του φωτός: (a) Διάδοση ακτίνας παράλληλα στον OA . (b) Διάδοση κάθετα στον OA αλλά πάνω στο επίπεδο της σελίδας, και (c) Διάδοση κάθετα στον OA και κάθετα στο επίπεδο της σελίδας

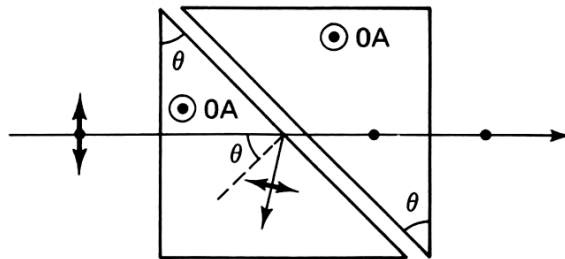
Αν το πάχος του κρυστάλλου είναι τέτοιο ώστε η διαφορά φάσης να είναι $\Delta\phi = \pi/2$, τότε έχουμε ένα πλακίδιο $\lambda/4$. Αν $\Delta\phi = \pi$, τότε έχουμε ένα πλακίδιο $\lambda/2$ μηδενικής τάξης. Επειδή τέτοια πλακίδια είναι

πάρα πολύ λεπτά γι' αυτό επιλέγονται πάχη τα οποία είναι ακέραια πολλαπλάσια του πάχους της μηδενικής τάξης. Δηλαδή, για ένα πλακίδιο $\lambda/4$ επιλέγουμε $\Delta\varphi = (2\pi)m + \pi/2$, όπου $m=1, 2, 3, \dots$

Επειδή το πάχος d ελέγχει τη διαφορά φάσης $\Delta\varphi$, γι' αυτό μια συνεχής δυνατότητα αλλαγής του πάχους είναι χρήσιμη. Ένα τέτοιο οπτικό σύστημα ονομάζεται σύστημα *αντιστάθμισης* (compensation) και ένας συχνά χρησιμοποιούμενος αντισταθμιστής είναι ο Soleil-Babinet που αποτελείται από δύο κρυστάλλους κομμένους με τριγωνική διατομή, με τον ένα να γλιστράει πάνω στον άλλο, με αποτέλεσμα το πάχος του συστήματος να μεταβάλλεται σταδιακά.

Στις προηγούμενες περιπτώσεις, οι δύο συνιστώσες πόλωσης της δέσμης εισόδου έχουν στη διάδοσή τους διαφορετικούς δείκτες διάθλασης αλλά παραμένουν σε μια δέσμη στην έξοδο. Είναι όμως δυνατό ο OA να σχηματίζει μία τυχαία γωνία με την διεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης. Τότε, εμφανίζονται δύο δέσμες στην έξοδο χωριστές μεταξύ τους, η κυρία (ordinary) και η δευτερεύουσα (extraordinary). Η δευτερεύουσα δεν ακολουθεί το νόμο του Snell και οι δύο δέσμες βγαίνουν από τον κρύσταλλο με κάθετες πολώσεις. Η κύρια δέσμη διαδίδεται μέσα στον κρύσταλλο με μια ταχύτητα που αντιστοιχεί σε ένα δείκτη διάθλασης $n_o = n_{\perp} = c/v_{\perp}$ και η δευτερεύουσα με ταχύτητα που αντιστοιχεί σε ένα δείκτη διάθλασης $n_e = n_{\parallel} = c/v_{\parallel}$. Το αποτέλεσμα είναι η δευτερεύουσα να ξεχωρίζει μέσα στον κρύσταλλο από την κυρία δέσμη. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί αν αναλύσουμε την δευτερεύουσα σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη στον OA . Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση για τους φοιτητές.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, από αυτά που αναφέραμε ότι αν οι δύο δέσμες με χωριστή πόλωση κάθετη μεταξύ τους, είναι δυνατόν να χωρισθούν και φυσικά, τότε η διπλή διάθλαση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε γραμμικά πολωμένο φως. Μία από τις ευρύτερα διαδεδομένες οπτικές διατάξεις για να το επιτύχουμε αυτό είναι και το πρίσμα Glan-Thomson που φαίνεται στο Σχήμα 15, που ακολουθεί.



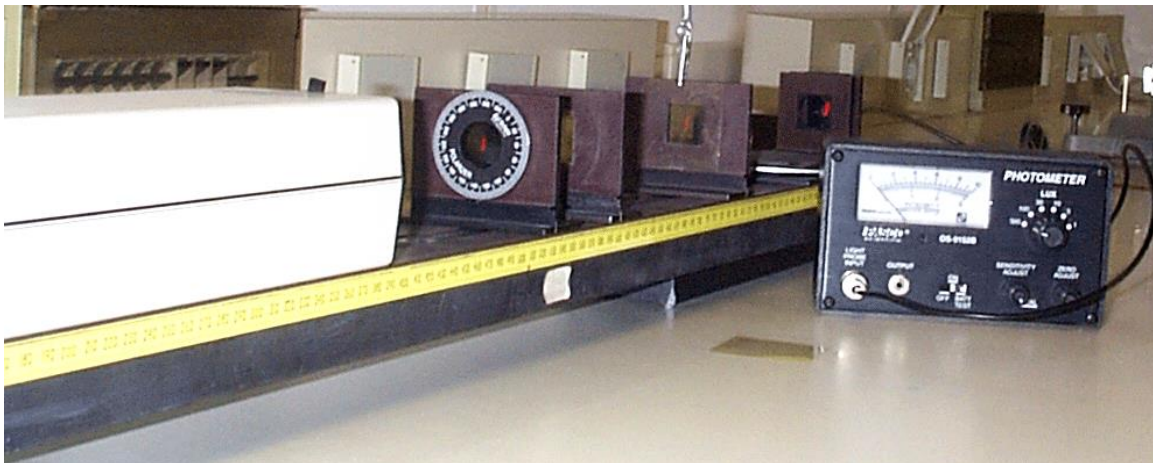
Σχήμα 15. Διάταξη του πρίσματος Glan-air

Στο Σχήμα απεικονίζονται δύο πρίσματα διπλοθλαστικών υλικών ασβεστίτη, με γωνίες πρίσματος θ και παράλληλους οπτικούς άξονες. Μεταξύ των πρισμάτων υπάρχει μικρό κενό αέρα. Επιλέγοντας τη γωνία θ μπορούμε να έχουμε ολική ανάκλαση της ακτίνας που έχει πόλωση παράλληλη στο επίπεδο που είναι κάθετο στον οπτικό άξονα. Το δεύτερο πρίσμα χρησιμοποιείται για να επαναφέρει την άλλη δέσμη στην κατεύθυνση της αρχικής (εκτός του υλικού) διεύθυνσης διάδοσης της δέσμης

3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Απαιτούμενος εξοπλισμός

- He-Ne laser
- οπτικός διάδρομος
- πολωτές Polaroid
- πλακίδια $\lambda/2$ και $\lambda/4$
- πέτασμα
- φωτοανιχνευτής



Σχήμα 16. Πειραματική διάταξη.

4. Εκτέλεση του πειράματος

- Χρησιμοποιώντας τον ένα πολωτή βρείτε αν το φως του laser είναι πολωμένο. Σχολιάστε.
- Χρησιμοποιώντας και τους δύο πολωτές επαληθεύστε τη σχέση του Malus, $I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ των Οπτικών Αξόνων (ΟΑ) των δύο πολωτών. Να γίνει γραφική παράσταση της $I(\theta)$ για $0 < \theta < 180^\circ$ για την πειραματική και θεωρητική καμπύλη, και να συγκριθούν οι δυο καμπύλες. Διατυπώστε τα συμπεράσματά σας. **Προσοχή**, ελαττώστε την ένταση του laser, ώστε να μην κορεστεί ο ανιχνευτής (χρησιμοποιήστε την πρώτη ή δεύτερη πιο ευαίσθητη κλίμακα).
- Τοποθετήστε δύο γραμμικούς πολωτές σε διαστάρωση μεταξύ φωτεινής πηγής και φωτομέτρου. Τοποθετήστε ένα τρίτο γραμμικό πολωτή ανάμεσα στους δύο, και περιστρέψτε τον έως ότου παρατηρήσετε μέγιστη ένταση. Σε ποια γωνία συμβαίνει αυτό και γιατί;
- Μετρήστε τη γωνία Brewster για ένα πλακίδιο γυαλιού και υπολογίστε το δείκτη διάθλασης του γυαλιού για το μήκος κύματος του laser ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$).
- Τοποθετήστε πρώτα πλακίδιο $\lambda/4$ και μετά έναν πολωτή μεταξύ laser και φωτομέτρου (όπου ο ΟΑ του πολωτή-αναλυτή είναι παράλληλος με την κατεύθυνση της γραμμικής πόλωσης του laser). Μετρήστε την ένταση $I(\varphi)$, για $0 < \varphi < 180^\circ$, όπου φ είναι η γωνία μεταξύ του ΟΑ του πλακιδίου $\lambda/4$ και την κατεύθυνση της γραμμικής πόλωσης του laser. Σχολιάστε για ποιές τιμές του φ θα δημιουργηθεί αριστερόστροφο και δεξιόστροφο κυκλικά πολωμένο φως. Για αυτές τις περιπτώσεις, περιστρέψτε τον πολωτή-αναλυτή, για να δείξετε ότι η ένταση δεν εξαρτάτε από την θέση του πολωτή. Εξηγήστε αναλυτικά τα αποτελέσματα (χρησιμοποιώντας ανύσματα και πίνακες Jones).
- Τοποθετήστε πλακίδιο $\lambda/2$ και έναν πολωτή μεταξύ φωτεινής πηγής και φωτομέτρου (όπου ο ΟΑ του πολωτή-αναλυτή είναι παράλληλος με την κατεύθυνση της γραμμικής πόλωσης του laser). Μετρήστε την ένταση $I(\varphi)$, για $0 < \varphi < 180^\circ$, όπου φ είναι η γωνία μεταξύ του ΟΑ του πλακιδίου $\lambda/2$ και την κατεύθυνση της γραμμικής πόλωσης του laser. Δείξτε ότι η πόλωση του φωτός περιστρέφεται με γωνία 2φ . Εξηγήστε αναλυτικά τα αποτελέσματα (χρησιμοποιώντας ανύσματα και πίνακες Jones).

Βιβλιογραφία

- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993
- E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Publishing Company, 1987

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π. Ρακιτζής, 2014. «Εργαστήριο Φυσικής III - Οπτική». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

