



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

Εργαστήριο Φυσικής III - Οπτική

Πέτρος Ρακιτζής

Τμήμα Φυσικής

6. ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ FRAUNHOFER

1. Σκοπός

Στο πείραμα αυτό θα ασχοληθείτε διαδοχικά με την περίθλαση Fraunhofer από μια σχισμή, από ένα ορθογώνιο και ένα κυκλικό άνοιγμα, από δύο σχισμές και από πολλές σχισμές.

Βασική προαπαιτούμενη γνώση

Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος ΙΙΙ, Κεφ. 38.1, 38.2 & 38.3 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

2. Θεωρία

2.1 Εισαγωγικά

Περίθλαση είναι κάθε απόκλιση από τις προβλέψεις της γεωμετρικής οπτικής για την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός, που προκαλείται από παρεμβολή κάποιου εμποδίου.

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει τον κυματικό χαρακτήρα του φωτός για να εξηγήσουμε φαινόμενα συμβολής από δύο ή περισσότερες δέσμες που προέρχονται από την ίδια πηγή και διαχωρίζονται με διαίρεση του πλάτους ή του επιπέδου του κύματος. Βασικά το ίδιο φαινόμενο, η κυματική υφή του φωτός, ενέχεται και στην περίθλαση. Κάθε προσπάθεια περιορισμού της διάδοσης του φωτός προκαλεί φαινόμενα στη σκιά του αντικειμένου που παρεμποδίζει το φως, τα οποία δεν μπορούν να εξηγηθούν με τη γεωμετρική οπτική.

Στη λεγόμενη *φυσική οπτική*, βασικής σημασίας για τη ερμηνεία των πειραματικών παρατηρήσεων είναι η *αρχή των Huygens-Fresnel*. Σύμφωνα με τον Huygens κάθε σημείο του μετώπου του κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια δευτερεύουσα πηγή που εκπέμπει ένα σφαιρικό κύμα. Στην υπόθεση αυτή ο Fresnel πρόσθεσε ότι το πραγματικό πεδίο μακριά από τη δευτερεύουσα πηγή είναι η υπέρθεση όλων των κυμάτων που προέρχονται από τις δευτερεύουσες πηγές, παίρνοντας υπόψη τα πλάτη και τις φάσεις για κάθε κύμα.

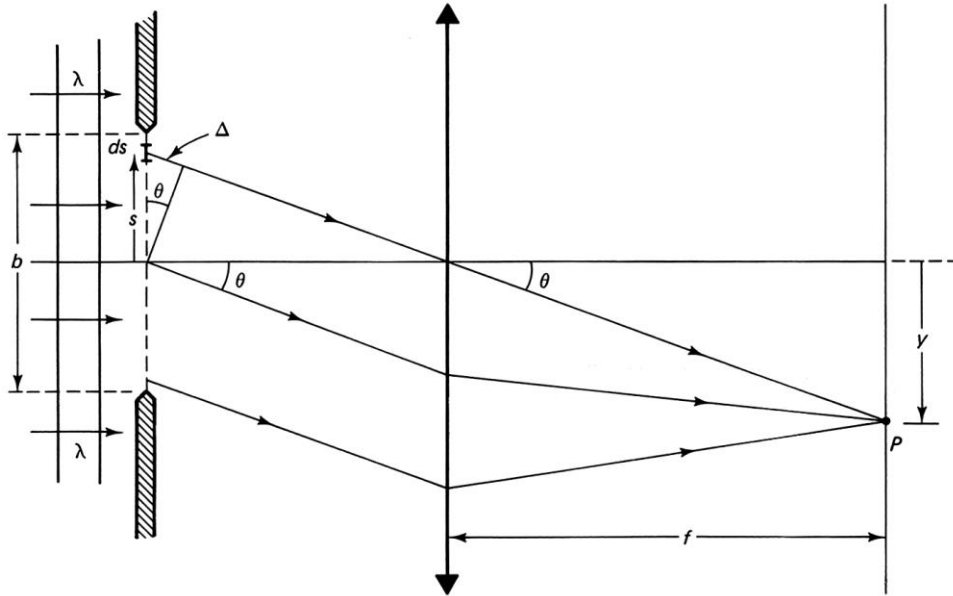
Επομένως, για να βρούμε την κατανομή της έντασης (εικόνα περίθλασης) που περιμένουμε να δούμε σε μία οθόνη, λόγω περίθλασης π.χ. από διπλή σχισμή, θα πρέπει να αθροίσουμε τα κύματα που προέρχονται από κάθε σημείο της επιφάνειας της κάθε σχισμής και να προσθέσουμε τα πλάτη, λαμβάνοντας υπόψη τις αποστάσεις που έχουν διανύσει τα διάφορα κυματικά μέτωπα, καθότι διαφορές στους οπτικούς δρόμους προκαλούν διαφορές στις φάσεις των κυμάτων που προστίθενται. Στην περίθλαση έχουμε συμβολή φωτεινών δεσμών που προέρχονται από μια συνεχή κατανομή πηγών, ενώ στα φαινόμενα συμβολής έχουμε συμβολή δεσμών που προέρχονται από διακριτό αριθμό πηγών. Αυτό, φυσικά, δεν αποτελεί θεμελιώδη αλλά μάλλον ιστορική διάκριση μεταξύ συμβολής και περίθλασης.

Μια επιπλέον διάκριση των φαινομένων που παρατηρούμε στην περίθλαση έχει να κάνει με τις μαθηματικές προσεγγίσεις που κάνουμε στον υπολογισμό του τελικού πεδίου. Αν η πηγή φωτός και το επίπεδο παρατήρησης (οθόνη) είναι και τα δύο σε μεγάλη απόσταση από το επίπεδο όπου το φως υφίσταται την περίθλαση, τότε το φως φθάνει στην οθόνη ως επίπεδο κύμα. Τότε μιλάμε για *περίθλαση Fraunhofer* ή *περίθλαση μακρινού πεδίου* (far-field diffraction). Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε τη λεγόμενη *περίθλαση Fresnel* ή *περίθλαση κοντινού πεδίου* (near-field diffraction). Στην περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer η εικόνα που παρατηρείται πάνω στο πέτασμα, αλλάζει ομοιόμορφα καθώς απομακρύνουμε την οθόνη από την σχισμή, πράγμα που δεν συμβαίνει στην περίπτωση της περίθλασης Fresnel.

Συνήθως, τα οπτικά στοιχεία (όπως φακοί, κάτοπτρα, πρίσματα, κλπ) που χρησιμοποιούνται για να αλλάξουν την πορεία και τις χωρικές διαστάσεις μιας φωτεινής δέσμης, έχουν τα ίδια ατέλειες και προκαλούν παραμορφώσεις στη διαδιδόμενη δέσμη που είναι πολλαπλάσιες εκείνων που προκαλούνται από περίθλαση. Επομένως, οπτικά των οποίων ο ρόλος περιορίζεται μόνο από την περίθλαση (diffraction limited optics) είναι στην πραγματικότητα πολύ καλά οπτικά.

2.2 Περίθλαση από μία σχισμή

Μια σχισμή είναι ένα ορθογώνιο άνοιγμα, του οποίου το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος του. Για περίθλαση Fraunhofer πρέπει η πηγή του φωτός να βρίσκεται μακριά από τη σχισμή, ώστε το κύμα που φθάνει στη σχισμή να είναι βασικά επίπεδο κύμα. Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας την πηγή στην εστία ενός συγκλίνοντος φακού, οπότε η εξερχόμενη δέσμη είναι παράλληλη, με την προϋπόθεση ότι η πηγή είναι σχετικά μικρή σε μέγεθος ώστε να θεωρείται σημειακή. Παρόμοια, η παρατήρηση σε μεγάλη απόσταση από τη σχισμή επιτυγχάνεται με ένα φακό εστιακής απόστασης f που συλλέγει όλες τις παράλληλες δέσμες σε συγκεκριμένο σημείο σε πέτασμα που τοποθετείται στην εστία του φακού. Για την περίπτωση που χρησιμοποιείται ως πηγή ένα laser He-Ne που έχει μια πολύ ελαφρά αποκλίνουσα παράλληλη δέσμη δεν χρειάζεται ο πρώτος φακός, ενώ και ο δεύτερος δεν είναι απαραίτητος για παρατηρήσεις σε πέτασμα, σε απόσταση μεγαλύτερη των 50cm από τη σχισμή (έλεγξε το αυτό).



Σχήμα 1. Γραφική αναπαράσταση του πειράματος για τη μελέτη της περίθλασης Fraunhofer από λεπτή σχισμή.

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται διαγραμματικά η περίπτωση περίθλασης Fraunhofer από μια σχισμή. Ένα επίπεδο κύμα προσπίπτει στη σχισμή που έχει πλάτος b και μήκος πολύ μεγαλύτερο του πλάτους της. Σύμφωνα με την αρχή Huygens-Fresnel θεωρούμε ότι κάθε σημείο της επιφάνειας της σχισμής είναι εστία σφαιρικών κυμάτων, τα οποία φθάνουν με την αντίστοιχη καθυστέρηση στο σημείο P όπου προστίθενται. Θεωρούμε ότι οι στοιχειώδεις πηγές της σχισμής έχουν κάποια απειροστή διάσταση ds και συνεισφέρουν στο P της μορφής:

$$dE_p = \left(\frac{dE_o}{r} \right) e^{i(kr - \omega t)} \quad (1)$$

όπου r είναι η οπτική απόσταση μεταξύ ds και P . Το πλάτος του κύματος διαιρείται με το r γιατί το πλάτος του σφαιρικού κύματος ελαττώνεται με την απόσταση κατά $1/r$. Ας θέσουμε $r=r_o$ για τη στοιχειώδη πηγή που βρίσκεται στο $s=0$. Τότε, το στοιχειώδες πεδίο στο σημείο P που προέρχεται από μία οποιαδήποτε στοιχειώδη πηγή ds σε απόσταση s από την αρχή του άξονα (δηλ. από το μέσο της σχισμής) δίνεται από τον τύπο:

$$dE_p = \left(\frac{dE_o}{r} \right) e^{i(k(r_o + \Delta) - \omega t)} \quad (2)$$

όπου λάβαμε υπόψη τη διαφορά φάσης που προκύπτει από τη διαφορά οπτικού δρόμου που διανύει το κύμα αυτό, σε σχέση με εκείνο που προέρχεται από το $s=0$.

Επειδή το $\Delta \ll r_o$, δεν περιλαμβάνουμε την αλλαγή του μήκους r στο πλάτος, δηλ. $dE_o/(r_o + \Delta) \approx dE_o/r_o \approx dE_o/r$. Όμως, η διαφορά φάσης είναι πολύ ευαίσθητη σε μικρές μεταβολές της διαδρομής. Το πλάτος της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από κάθε στοιχειώδη πηγή εξαρτάται από το μέγεθος του ds , έτσι ώστε όταν όλες οι συνεισφορές προστεθούν, να έχουμε την ολική συνεισφορά στο σημείο P . Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$dE_o = E_L ds \quad (3)$$

όπου E_L είναι το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου ανά μονάδα πλάτους της σχισμής ($E_L b = E_o$). Για το σημείο P , σε γωνία θ κάτω από τον άξονα που περνά από το κέντρο του φακού, έχουμε από το Σχήμα 1 ότι, $\Delta = s \sin \theta$. Έτσι, η διαφορική συνεισφορά στο πεδίο του P από μια οποιαδήποτε στοιχειώδη πηγή ds γίνεται:

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r_o} \right) e^{i(kr_o + ks \sin(\theta) - \omega t)} \quad (3a)$$

Ολοκληρώνοντας σ' όλο το πλάτος της σχισμής έχουμε

$$E_p = \left(\frac{E_L}{r_o} \int_{-b/2}^{b/2} e^{iks \sin(\theta)} ds \right) e^{i(kr_o - \omega t)} \quad (4)$$

Επειδή μας ενδιαφέρει η ένταση την οποία μπορούμε να μετρήσουμε και όχι το πλάτος του πεδίου, λόγω της πολύ υψηλής συχνότητας των οπτικών κυμάτων $\omega \sim 10^{14}$ Hz, και $I = E_p E_p^* = |E_p|^2$, γι' αυτό κρατάμε μόνο τους όρους της παρένθεσης στην (4) και έχουμε

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \left(\frac{e^{iks \sin(\theta)}}{ik \sin(\theta)} \right)_{-b/2}^{b/2} \quad (5)$$

Αν θέσουμε τα όρια της ολοκλήρωσης στην (5) έχουμε

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{1}{ik \sin(\theta)} \left(e^{(ikb \sin(\theta))/2} - e^{-(ikb \sin(\theta))/2} \right) \quad (6)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση

$$\beta \equiv \frac{1}{2} kb \sin(\theta) \quad (7)$$

λαμβάνουμε την εξίσωση

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{1}{2i\beta} \left(e^{i\beta} - e^{-i\beta} \right) = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} (2i \sin(\beta)) \quad (8)$$

όπου εφαρμόζουμε την εξίσωση του Euler για τους εκθετικούς όρους. Τελικά, απλοποιώντας, καταλήγουμε στη σχέση:

$$E_R = \frac{E_L b \sin(\beta)}{r_o \beta} \quad (9)$$

Το πλάτος πεδίου στο P , που δίνεται από εξίσωση (9), περιέχει τη συνάρτηση $\sin(\beta)/\beta$, όπου το β αλλάζει με την γωνία θ και επομένως με τη θέση του P πάνω στο πέτασμα. Μπορούμε να δώσουμε μια φυσική σημασία στο β αν το ορίσουμε ως διαφορά φάσης που ορίζεται γενικά ως $k\Delta$. Η εξίσωση (7) δίνει στο Δ την τιμή $\Delta = (b/2) \sin(\theta)$ που αντιστοιχεί στη διαφορά φάσης μεταξύ των κυμάτων που προέρχονται από το κέντρο και από τα άκρα της σχισμής, όπου $s = (b/2)$.

Η ένταση του κύματος είναι ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους του, συνεπώς

$$I = \left(\frac{\varepsilon_0 c}{2} \right) E_R^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left(\frac{E_L b}{r_o} \right)^2 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \quad (9\alpha)$$

όπου ε_0 η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού. Η σχέση (9α) γράφεται και ως

$$I = I_o \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \equiv I_o \operatorname{sinc}^2(\beta) \quad (10)$$

όπου το I_o περιέχει όλες τις σταθερές. Η συνάρτηση *sinc* πλησιάζει το I όταν το β πλησιάζει το μηδέν, δηλ. $I=I_o$ για $\theta=0$. Αντίθετα, η ένταση μηδενίζεται όταν $\sin(\beta)=0$, δηλ. όταν

$$\beta = \frac{1}{2} kb \sin(\theta) = m\pi, \quad \text{με } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (11\alpha)$$

Το Σχήμα 2 δείχνει την μεταβολή της έντασης και του πλάτους συναρτήσει του β . Θέτοντας $k=2\pi/\lambda$, η συνθήκη (11α) για ρίζες της συνάρτησης *sinc* γίνεται:

$$m\lambda = b \sin(\theta) \quad (12)$$

Πάνω στο πέτασμα η ένταση είναι μέγιστη στο $\theta=0$, που αντιστοιχεί στο $y=0$ και γίνεται μηδέν για κάθε y που δίνεται από την σχέση:

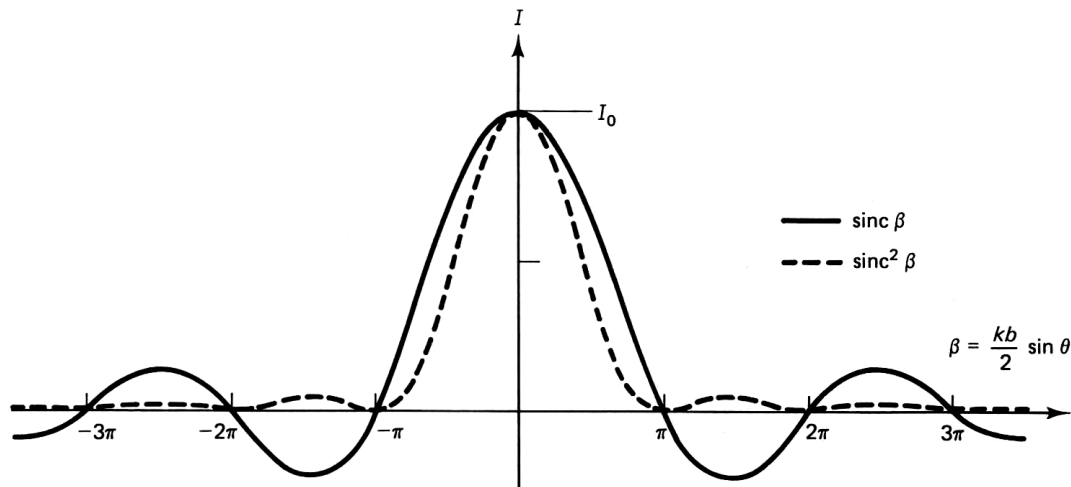
$$y \cong \frac{m\lambda f}{b} \quad (13)$$

Η εξίσωση (13) ισχύει για μικρές γωνίες όπου $\sin(\theta) \sim \theta \sim y/f$.

Η ένταση είναι συμμετρική γύρω από το $y=0$. Τα δευτερογενή μέγιστα δεν είναι ακριβώς στο μέσον μεταξύ διαδοχικών σημείων μηδενισμού, αλλά περίπου το πλησιάζουν, καθώς το β αυξάνεται. Τα μέγιστα της συνάρτησης δίνονται από τη σχέση:

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\beta \cos(\beta) - \sin(\beta)}{\beta^2} = 0 \Rightarrow \tan(\beta) = 0 \quad (13\alpha)$$

και παρουσιάζονται στο Σχήμα 3. Η εξίσωση ικανοποιείται για $\beta=1.43\pi, 2.46\pi, 3.47\pi$ κλπ.



Σχήμα 2. Η εξάρτηση της συνάρτησης *sinc* (πλήρης γραμμή) από το β . Η κατανομή της έντασης I (διακεκομμένη γραμμή) για μια σχισμή για την περίθλαση Fraunhofer είναι ανάλογη με το τετράγωνο της *sinc*(β). Η συνάρτηση αυτή είναι κανονικοποιημένη ως προς την ένταση στο $y=0$.

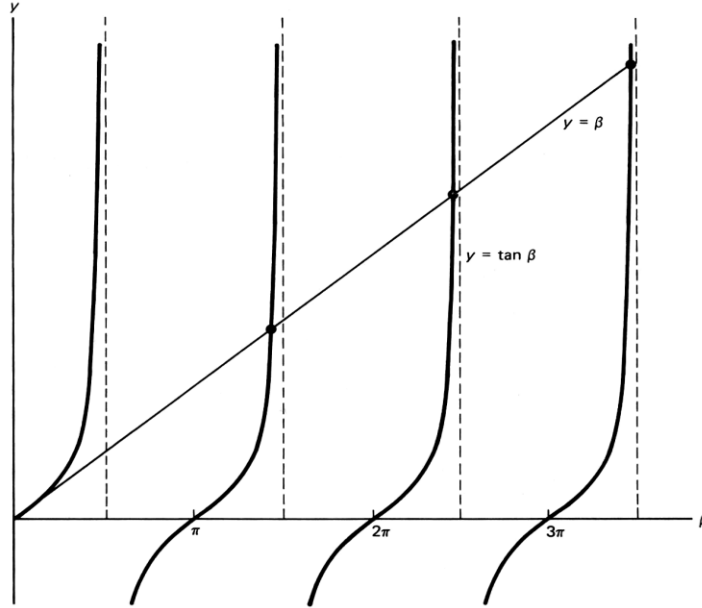
Παράδειγμα:

Ποιος είναι ο λόγος των εντάσεων του κυρίως λοβού και του πρώτου από τα δευτερεύοντα μέγιστα;

Ο λόγος υπολογίζεται από τη σχέση της έντασης για $\beta=0$ και $\beta=1.43\pi$

$$\frac{I_{\beta=0}}{I_{\beta=1.43\pi}} = \frac{(\sin^2(\beta))_{\beta=0}}{(\sin^2(\beta))_{\beta=1.43\pi}} = \frac{1}{(\sin^2(\beta))_{\beta=1.43\pi}} = \left(\frac{\beta^2}{\sin^2(\beta)} \right)_{\beta=1.43\pi} = \frac{20.18}{0.952} = 21.2 \quad (13\beta)$$

Άρα ο λόγος του μεγίστου της έντασης του πρώτου δευτερεύοντος λοβού προς τον κύριο είναι μόλις 4.7%.



Σχήμα 3. Παριστάνει τις τομές των συναρτήσεων $y=\beta$ και $y=\tan(\beta)$. Οι τομές συμβαίνουν στα 1.43π (αντί για 1.5π), 2.46π (αντί 2.5π), 3.47π (αντί 3.5π), κλπ.. Παρατηρήστε ότι όσο το β αυξάνει τόσο οι τιμές πλησιάζουν τις ευθείες που είναι ακριβώς στο μέσον των διαστημάτων. Το μεγαλύτερο μέρος της έντασης βρίσκεται στον κεντρικό λοβό.

Ο κεντρικός λοβός περιθλασης (δηλ. το συνολικό πλάτος μεταξύ των δύο πρώτων μηδενισμών της έντασης εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου) φαίνεται υπό γωνία $\Delta\theta$ από τη σχισμή (Σχήμα 4). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (12) για $m= \pm 1$ και θέτοντας $\sin(\theta)=\theta$, έχουμε

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b} \quad (14)$$

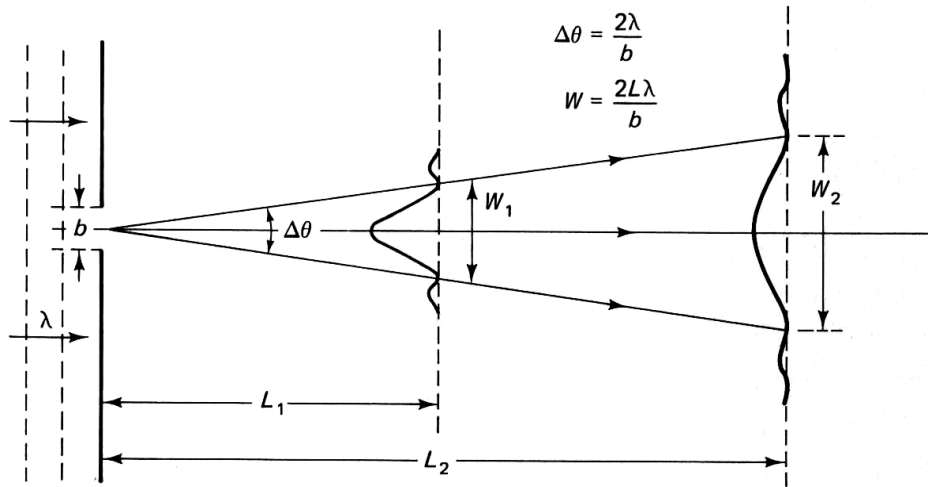
Δηλαδή, ο κεντρικός λοβός απλώνει απεριόριστα όσο το εύρος της σχισμής ελαττώνεται. Θα πλησιάσει όμως το άπειρο; Πρόσφατα πειράματα έδειξαν ότι για σχισμές της τάξης των nm η περιθλαση αρχίζει να περιορίζεται. Αυτό οφείλεται στην αλληλεπίδραση του φωτός με τα φωνόνια των μετάλλων που στη σχισμή έχουν κατεύθυνση ορμής μη παράλληλη προς την επιφάνεια. Είναι επίσης φανερό από την εξίσωση (14) ότι οι διαστάσεις του πρώτου λοβού εξαρτώνται και από το μήκος κύματος λ . Επομένως μπορούμε μετρώντας την $\Delta\theta$ να προσδιορίσουμε τα μεγέθη λ και b αν ένα από αυτά είναι γνωστό με άλλο τρόπο.

2.3 Άνοιγμα της δέσμης

Σύμφωνα με την εξίσωση (14), το γωνιακό άνοιγμα του κεντρικού λοβού από περιθλαση Fraunhofer, είναι ανεξάρτητο της απόστασης σχισμής – πετάσματος, L . Η γραμμική διάσταση του λοβού W , προφανώς θα αυξάνεται αυξανόμενης της απόστασης L , όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4, σύμφωνα με τη σχέση :

$$W = L\Delta\theta = \frac{2L\lambda}{b} \quad (15)$$

Επομένως, η περίθλαση από σχισμή επιβάλλει άνοιγμα της διερχόμενης δέσμης, με τον πρώτο λοβό να επεκτείνεται σύμφωνα με την (15). Αν δεν έχουμε σχισμή, αλλά απλώς δέσμη με κάποια εγκάρσια διατομή, τότε θα υποστεί περίθλαση που οφείλεται στην πεπερασμένη εγκάρσια διατομή της. Δηλαδή, όλες οι παράλληλες δέσμες ανοίγουν.



Σχήμα 4. Αναπαράσταση του κεντρικού λοβού της περίθλασης από μια λεπτή σχισμή.

Παράδειγμα

Έστω μια παράλληλη δέσμη laser με $\lambda=546 \text{ nm}$ και εύρος $b=0.5 \text{ mm}$ που διαδίδεται σε απόσταση 10m . Βρείτε το τελικό άνοιγμα της δέσμης.

Λύση: Από την εξίσωση (15) έχουμε ότι

$$W = \frac{2L\lambda}{b} = \frac{2(10)(546 \times 10^{-9})}{0.5 \times 10^{-3}} = 21.8 \text{ mm}.$$

Δηλαδή, ακόμη και η δέσμη ενός laser που είναι αρκετά παράλληλη υφίσταται περίθλαση. Δεν μπορούν να υπάρξουν τελείως παράλληλες δέσμες φωτός. Αυτό αποτελεί μία βασική συνέπεια της κυματικής φύσης του φωτός.

Η ενεργειακή κατανομή της έντασης μιας βασικής ακτίνας laser σε εγκάρσια διατομή είναι Γκαουσιανή. Υποθέτουμε εδώ ότι το άνοιγμα της σχισμής είναι πολύ μικρό σε σχέση με τη διάμετρο της δέσμης που ορίζεται από την ακτίνα που αντιστοιχεί στο ήμισυ της μέγιστης έντασης, ώστε η ένταση στην επιφάνεια της σχισμής να είναι ομοιόμορφη. Επιπλέον έχουμε υποθέσει ότι έχουμε επίπεδο κύμα το οποίο προσπίπτει στη σχισμή. Στην περίπτωση μη επιπέδου κύματος αναμένονται τροποποιήσεις της σχέσης που περιγράφει την περίθλαση.

Η σχέση (15) βρέθηκε για την προσέγγιση Fraunhofer, μακρινού πεδίου. Η γενικότερη θεωρία της περίθλασης προβλέπει ότι υπάρχει μια περιοχή κοντά στη σχισμή, όπου η διάμετρος της δέσμης είναι μικρότερη από το άνοιγμα της σχισμής b . Επομένως, για να έχουμε περίθλαση Fraunhofer πρέπει το πέτασμα να είναι σε απόσταση $L \gg$ από ένα L_{\min} , όπου ισχύει $w=b$. Δηλαδή,

$$L_{\min} = \frac{b^2}{2\lambda} \quad \text{και} \quad L \gg \frac{b^2}{\lambda} \quad (15a)$$

Μια γενικότερη αντιμετώπιση της περίθλασης οδηγεί στο ακόλουθο κριτήριο για να έχουμε περίθλαση Fraunhofer:

$$L \gg (\text{εμβαδόν της σχισμής})/\lambda \quad (16)$$

(Βλ. κεφάλαιο για την περίθλαση Fresnel)

2.4 Περίθλαση από ορθογώνιες και κυκλικές οπές

Μέχρι τώρα περιγράψαμε την περίθλαση από μια σχισμή με πλάτος b πολύ μικρότερο του μήκους της, Σχήμα 5(a). Όταν και οι δύο διαστάσεις της σχισμής είναι παραπλήσιες, τότε θα έχουμε αισθητή περίθλαση και στις δύο διευθύνσεις (Σχήμα 5). Για το ύψος a , γράφουμε λοιπόν σχέση ανάλογη της εξίσωσης (10):

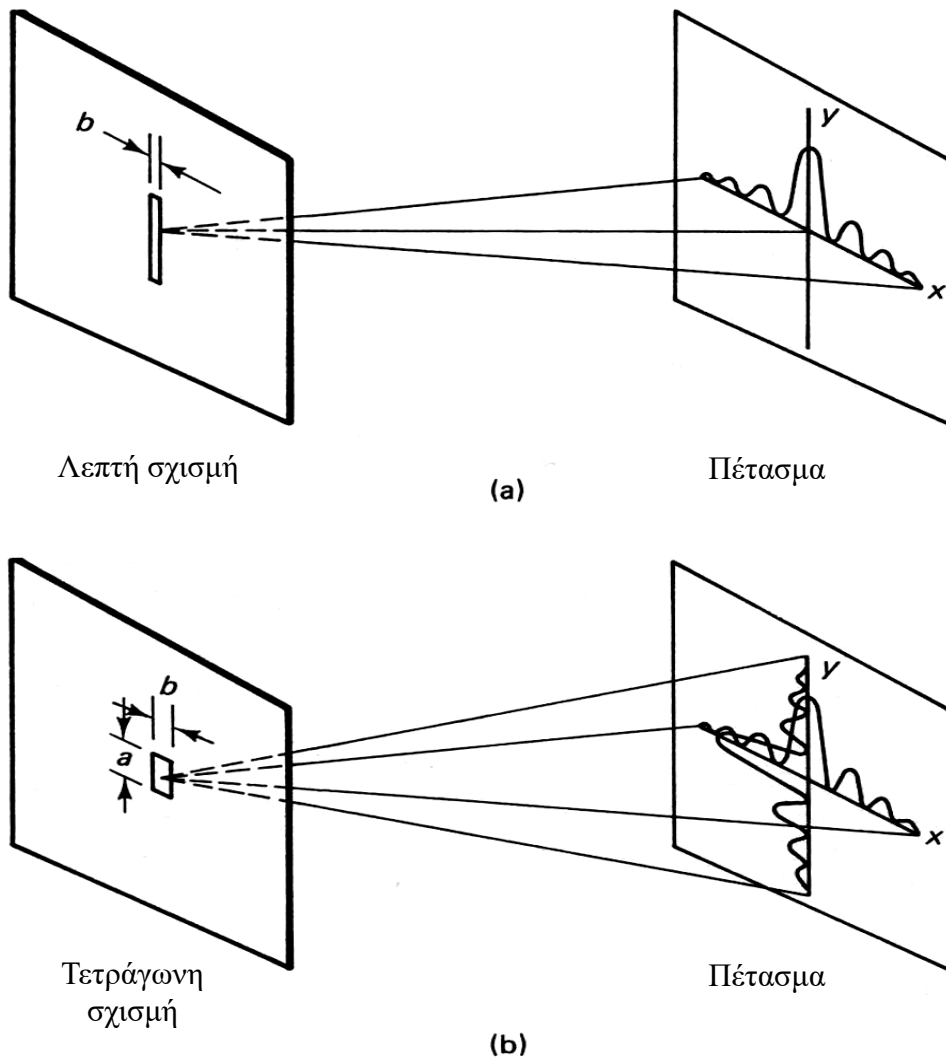
$$I = I_o \left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)^2 \quad \text{όπου} \quad \alpha = \left(\frac{k}{2} \right) a \sin(\theta) \quad (17)$$

Η ένταση του πεδίου θα εμφανίζει μηδενικές τιμές στα x και y που ικανοποιούν τις σχέσεις:

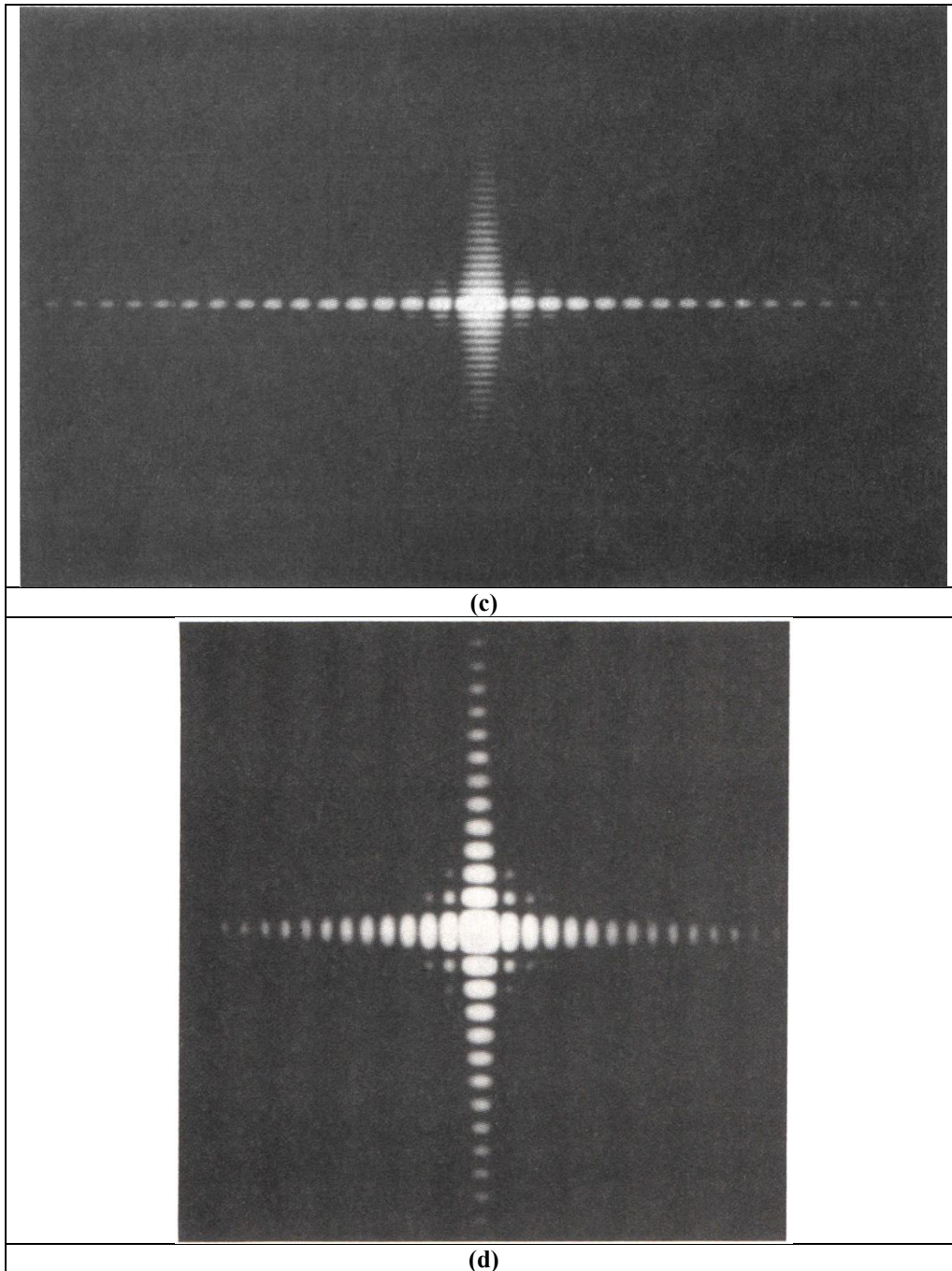
$$y = \frac{m\lambda f}{b} \quad \text{και} \quad x = \frac{n\lambda f}{a} \quad (17a)$$

όπου τα m και n είναι ακέραιοι αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Η ένταση πάνω στο πέτασμα είναι το γινόμενο των επιμέρους εντάσεων στους άξονες x και y είναι:

$$I = I_o (\sin^2 \beta)(\sin^2 \alpha) \quad (18)$$



Σχήμα 5. (a) Περίθλαση Fraunhofer από λεπτή σχισμή πλάτους b . Μόνο αυτή η διάσταση εμφανίζει σημαντική περίθλαση. (b) Περίθλαση από τετράγωνη σχισμή όπου τα a και b έχουν τις ίδιες περίπου τιμές.



Σχήμα 5: (συνέχεια) (c) Πραγματική εικόνα περίθλασης της περίπτωσης (a). (d) Πραγματική εικόνα περίθλασης από τετράγωνη σχισμή που αντιστοιχεί στην περίπτωση (b).

Τα Σχήματα 5(c) και 5(d) εμφανίζουν τα αποτελέσματα από περίθλαση από ορθογώνιο άνοιγμα.

Όταν το άνοιγμα είναι κυκλικό η ολοκλήρωση που αφορά την περίθλαση γίνεται πάνω σ' ολόκληρη την επιφάνεια του ανοίγματος. Επομένως, στη θέση της εξίσωσης (3) ορίζουμε το $dE_o = E_A dA$, όπου E_A είναι τώρα το πλάτος ανά μονάδα επιφάνειας. Το πεδίο στο **P** δίνεται από την σχέση:

$$E_P = \frac{E_A}{r_o} \iint_{Area} e^{isk \sin \theta} dA \quad (18a)$$

Παίρνοντας ως στοιχειώδη επιφάνεια μια ορθογώνια ταινία επιφάνειας $dA=xds$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6α και χρησιμοποιώντας την εξίσωση του κύκλου, υπολογίζουμε ότι το x δίνεται από τη σχέση:

$$x = 2\sqrt{R^2 - s^2} \quad (18b)$$

όπου R είναι η ακτίνα του κυκλικού ανοίγματος. Το ολοκλήρωμα τότε γίνεται:

$$E_P = \frac{2E_A}{r_o} \int_{-R}^R e^{isk \sin \theta} \sqrt{R^2 - s^2} ds \quad (18c)$$

Με τις αντικαταστάσεις $v=s/R$ και $\gamma=kR \sin(\theta)$ το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$E_P = \frac{2E_A R^2}{r_o} \int_{-1}^{+1} e^{i\gamma v} \sqrt{1-v^2} dv \quad (18d)$$

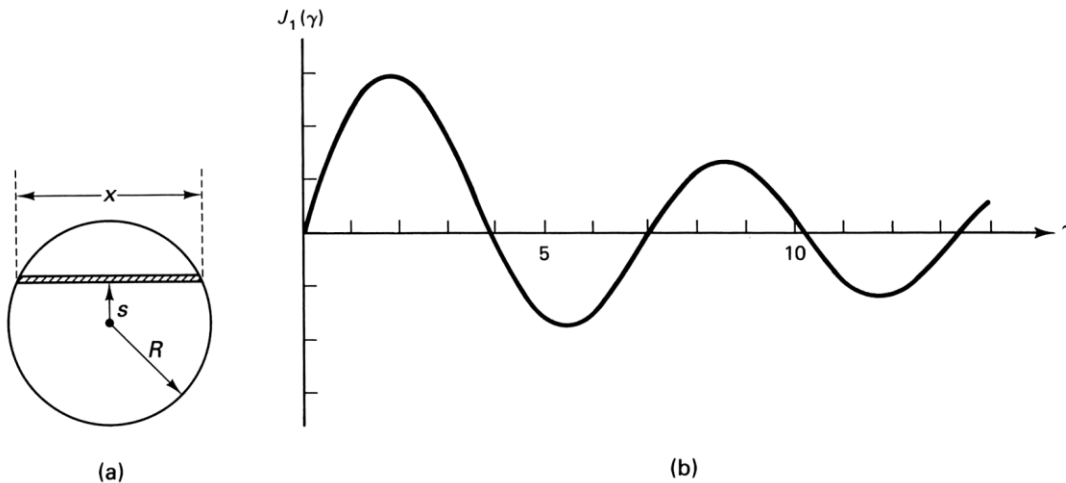
Η τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\gamma v} \sqrt{1-v^2} dv = \frac{\pi J_1(\gamma)}{\gamma} \quad (18e)$$

όπου $J_1(\gamma)$ είναι μια συνάρτηση Bessel πρώτης τάξης που εκφράζεται από τη σειρά

$$J_1(\gamma) = \frac{\gamma}{2} - \frac{(\gamma/2)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{(\gamma/2)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \dots \quad (18f)$$

Από τη σειρά αυτή βλέπουμε ότι το όριο της $J_1(\gamma)/\gamma$, για $\gamma \rightarrow 0$, είναι το $1/2$. Επομένως, για την κυκλική οπή αντί για συνάρτηση \sin που είχαμε στην ορθογώνια σχισμή, έχουμε την συνάρτηση *Bessel* J_1 , η οποία ταλαντώνεται και αυτή όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6. (α) Η γεωμετρία που χρησιμοποιήθηκε στην ολοκλήρωση για μια κυκλική οπή. (β) Η συνάρτηση *Bessel* $J_1(\gamma)$. Η πρώτη μηδενική τιμή είναι στο $\gamma=3.832$.

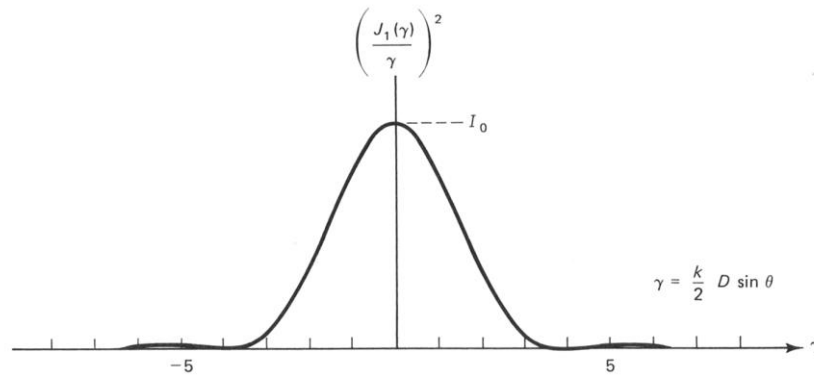
Για μια οπή διαμέτρου D , η κατανομή της έντασης πάνω στο πέτασμα για περίθλαση Fraunhofer μπορεί να γραφεί ως:

$$I = I_0 \left(\frac{2J_1(\gamma)}{\gamma} \right)^2 \quad \text{όπου} \quad \gamma \equiv \frac{1}{2} kD \sin(\theta) \quad (19)$$

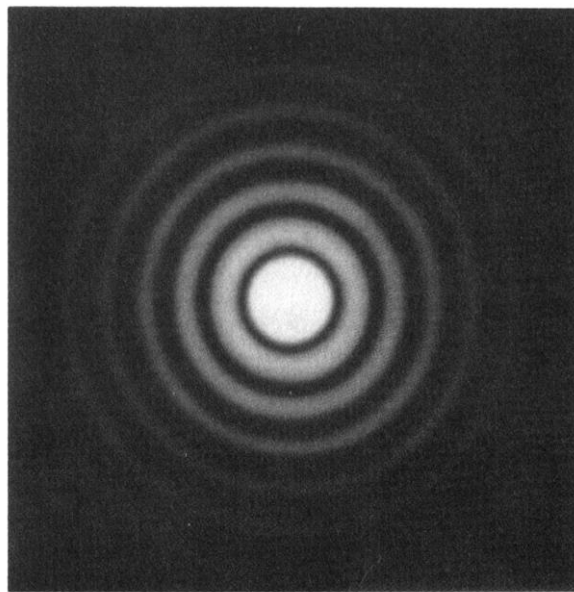
και I_0 είναι η ένταση στο $\gamma=0$, δηλαδή $\theta=0$. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6b, η συνάρτηση $J_1(\gamma)$ μηδενίζεται για $\gamma=3.832$. Δηλαδή, έχουμε $I=0$, όταν

$$\gamma = \frac{1}{2} kD \sin(\theta) = 3.832 \quad \text{ή όταν} \quad D \sin(\theta) = 1.22\lambda \quad (20)$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να συγκριθεί με την ανάλογη εξίσωση για την ορθογώνια σχισμή, (εξίσωση 12), για $m=1$. Βλέπουμε ότι το $m=1$ αντικαθίσταται με το 1.22 για κυκλική οπή. Τα διαδοχικά σημεία μηδενισμού βρίσκονται από τις ρίζες της $J_1(\gamma)$. Στο Σχήμα 7 φαίνονται η συνάρτηση $(J_1(\gamma)/\gamma)^2$ και μια πραγματική φωτογραφία της έντασης στο πέτασμα.



(a)



(b)

Σχήμα 7. (a) Κατανομή της έντασης για μια κυκλική οπή. Το μεγαλύτερο τμήμα αυτής της έντασης εμφανίζεται στο κέντρο. (b) Πραγματική εικόνα κατανομής της έντασης για μια κυκλική οπή.

Το κεντρικό τμήμα αντιστοιχεί στη μηδενική τάξη της περίθλασης. Ο κύκλος αυτός είναι γνωστός ως δίσκος του Airy. Η γωνία υπό την οποία φαίνεται ο δίσκος Airy από το επίπεδο της οπής σύμφωνα με τη σχέση (20) είναι περίπου:

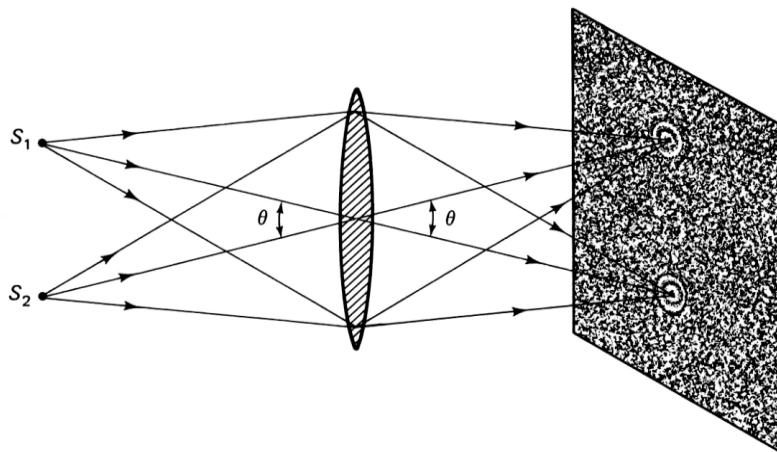
$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D} \quad (21)$$

2.5 Διακριτική ικανότητα

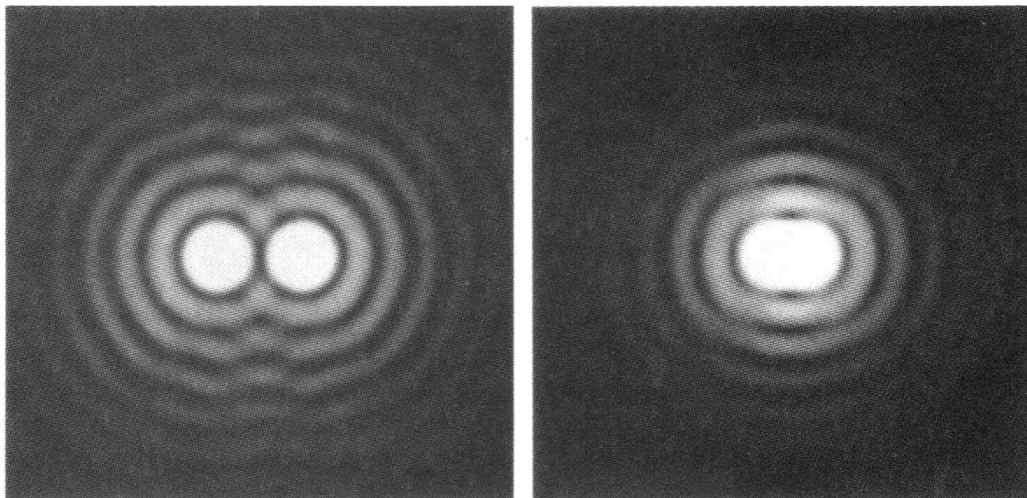
Από τη σχέση (21) βλέπουμε ότι η γωνιακή απόκλιση μιας παράλληλης δέσμης διαμέτρου D είναι δεδομένη για τον κεντρικό λοβό της περίθλασης. Για την περίπτωση που προσπαθούμε να απεικονίσουμε ένα πολύ μακρινό αντικείμενο (ένα άστρο) πάνω σε μια φωτογραφική πλάκα η περίθλαση που αντιστοιχεί στο άνοιγμα του φακού θα απεικονίζεται στην πλάκα ως ένας δίσκος του Airy με $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

για τον κεντρικό λοβό.



(a)



(b)

(c)

Σχήμα 8. (a) Είδωλα των S_1 και S_2 που σχηματίζονται στο πέτασμα από ένα φακό. Όσο οι δίσκοι Airy που σχηματίζονται για κάθε πηγή είναι χωριστά τα είδωλα ξεχωρίζουν. (b) Όταν οι πηγές S_1 και S_2 πλησιάζουν, οι δίσκοι Airy πλησιάζουν επίσης. Στην περίπτωση αυτή τα είδωλα είναι ακόμη χωριστά. (c) Τα είδωλα

των πηγών S_1 και S_2 όταν πλησιάζουν τόσο ώστε μόλις να ξεχωρίζουν (η απόσταση των κέντρων των δίσκων ισούται με την ακτίνα των δίσκων).

Για ένα άλλο σημείο θα έχουμε αντίστοιχα έναν άλλο δίσκο Airy. Χρειάζεται επομένως ένα κριτήριο διαχωρισμού των δύο σημείων. Σύμφωνα με το κριτήριο του Rayleigh η ελάχιστη γωνιακή απόκλιση δίνεται όταν οι δύο δίσκοι Airy έχουν κέντρα που απέχουν την ακτίνα των δίσκων. Στην περίπτωση αυτή έχουμε για το όριο της διακριτικής ικανότητας:

$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D} \quad (22)$$

όπου D είναι τώρα η διάμετρος του φακού εστίασης μιας και καθορίζει το άνοιγμα της οπής που προκαλεί την περίθλαση. Μπορούμε σύμφωνα με την (22) να αυξήσουμε τη διακριτική ικανότητα αυξάνοντας τη διάμετρο του φακού και χρησιμοποιώντας μικρότερο μήκος κύματος. Στο Σχήμα 8 φαίνονται τα είδωλα δύο πηγών ως δίσκοι Airy.

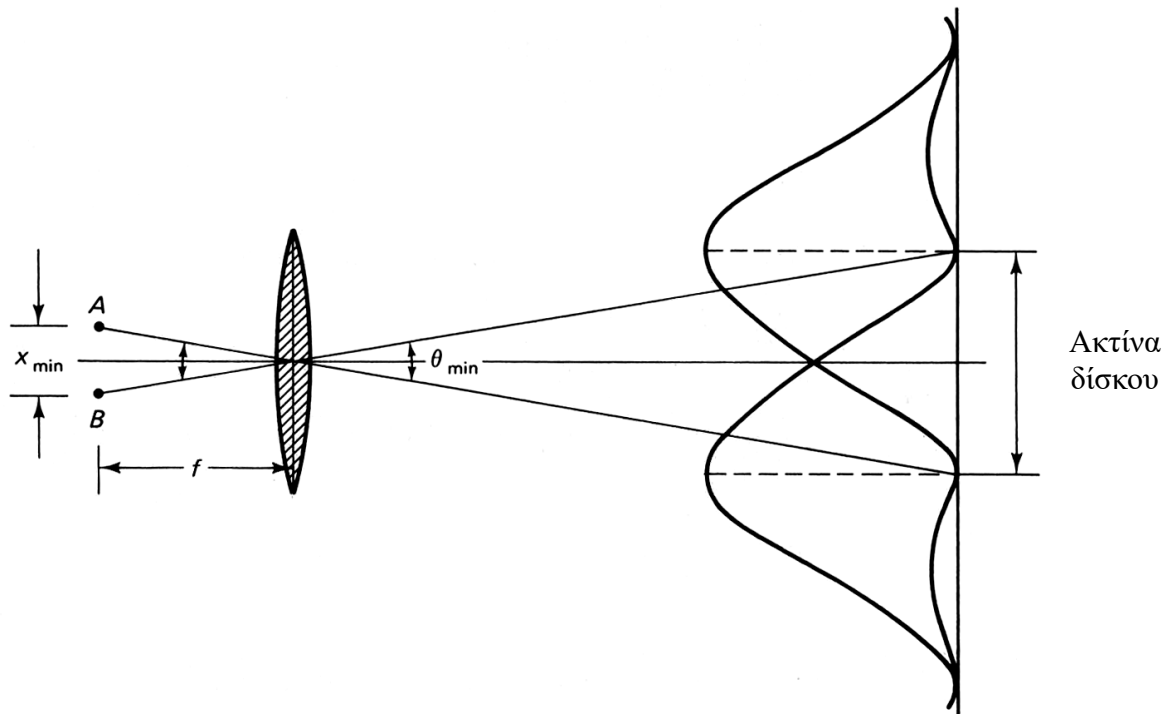
Στο Σχήμα 9 φαίνεται η θέση των δίσκων Airy που αντιστοιχούν στο κριτήριο Rayleigh. Στο Σχήμα 10 φαίνεται η ελάχιστη γωνιακή διακριτική ικανότητα που για ένα φακό μικροσκοπίου. Τα μέγιστα των δίσκων Airy απέχουν μεταξύ τους όσο η ακτίνα του δίσκου.

Η ελάχιστη απόσταση x_{\min} μεταξύ δύο σημείων A και B που είναι σε εστιακό επίπεδο ενός φακού, Σχήμα 10, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η περίθλαση Fraunhofer, θα είναι

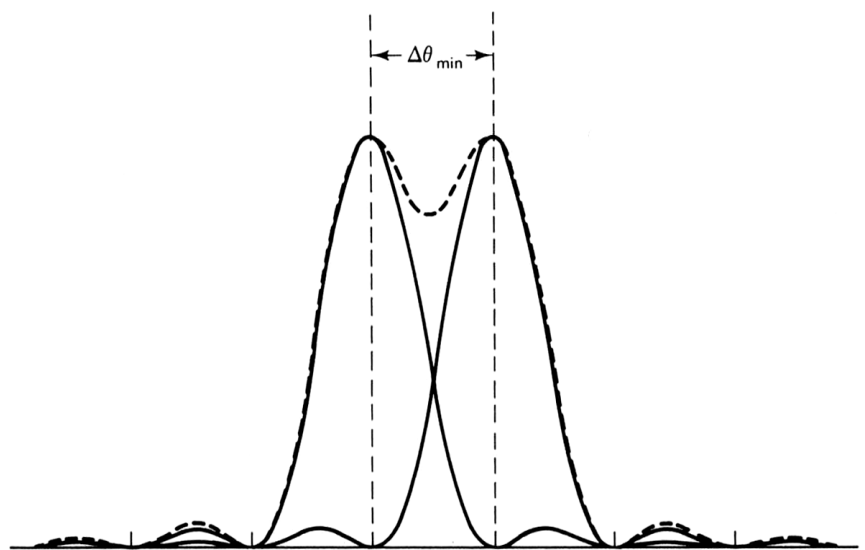
$$x_{\min} = f\theta_{\min} = f\left(\frac{1.22\lambda}{D}\right) \quad (22a)$$

Ο λόγος D/f ονομάζεται *αριθμητικό άνοιγμα* του φακού (numerical aperture). Για ένα καλό φακό με $D/f=1.2$ έχουμε

$$x_{\min} \cong \lambda \quad (22b)$$



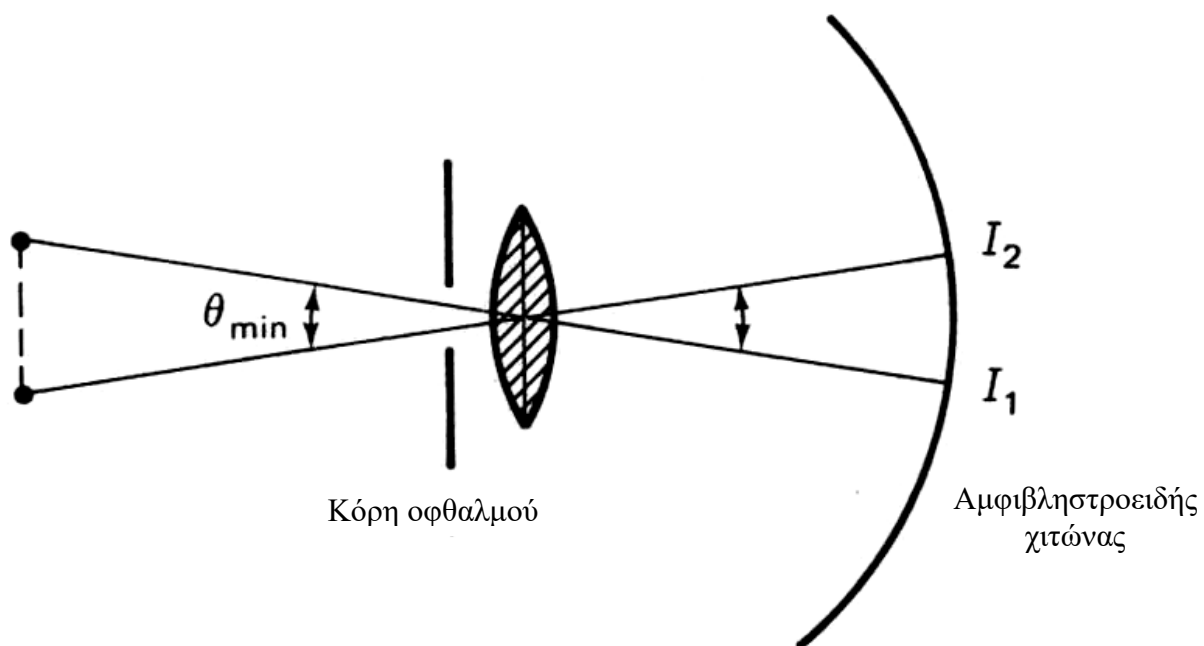
Σχήμα 9. Το κριτήριο Rayleigh για δύο σημεία περίθλασης που μόλις ξεχωρίζουν.



Σχήμα 10. Ελάχιστη γωνιακή διακριτική ικανότητα για ένα φακό.

Διακριτική ικανότητα του οφθαλμού:

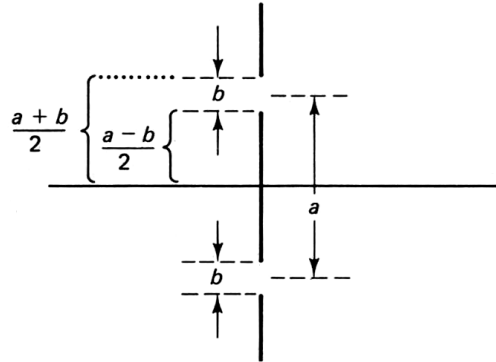
Κατά τη διάρκεια μιας ηλιόλουστης ημέρας η διάμετρος της ίριδας του οφθαλμού είναι περίπου 2mm . Από τη σχέση (22) βρίσκουμε για $\lambda=550\text{nm}$ ότι $\Delta\theta_{\min}= 33.6 \times 10^{-5} \text{ rad}$. Για απόσταση 40cm από τον οφθαλμό θα έχουμε $x=(40\text{cm})\sin(\theta_{\min}/2)=(40\text{cm})(\theta_{\min}/2)=670 \times 10^4 \mu\text{m}=67\mu\text{m}$. Τη νύχτα η ίριδα ανοίγει και μπορεί να φθάσει και τα 8mm , οπότε αυξάνει η διακριτική ικανότητα ανάλογα. Στο Σχήμα 11 φαίνεται η διάταξη του οφθαλμού.



Σχήμα 11. Διάταξη του οφθαλμού με την ίριδα να περιορίζει την είσοδο και να καθορίζει την διακριτική ικανότητα.

2.6 Περίθλαση από διπλή σχισμή

Στην περίπτωση αυτή οι υπολογισμοί είναι παρόμοιοι με αυτούς της μιας σχισμής, εξίσωση (4). Τα όρια της ολοκλήρωσης αλλάζουν και είναι αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 12.



Σχήμα 12. Καθορισμός των ορίων για την περίθλαση των δύο σχισμών.

Για το πλάτος E_R θα έχουμε

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \int_{-(a+b)/2}^{-(a-b)/2} e^{iks \sin \theta} ds + \frac{E_L}{r_o} \int_{(a-b)/2}^{(a+b)/2} e^{iks \sin \theta} ds \quad (23)$$

Ολοκλήρωση και αντικατάσταση των ορίων δίνει

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{1}{ik \sin \theta} \left(e^{ik \sin \theta (-a+b)/2} - e^{ik \sin \theta (-a-b)/2} + e^{ik \sin \theta (a+b)/2} - e^{ik \sin \theta (a-b)/2} \right) \quad (23a)$$

Εισάγοντας τις τιμές για β και α όπως στις (7) και (17), έχουμε

$$\beta \equiv \frac{1}{2} kb \sin \theta \quad (24)$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} ka \sin \theta \quad (25)$$

Η εξίσωση (23a) γράφεται πιο συμπυκνωμένα ως

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} \left(e^{i\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{-i\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \right) \quad (25a)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Euler έχουμε

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta)(2 \cos \alpha) \quad (25b)$$

και τελικά

$$E_R = \frac{2E_L b \sin \beta}{r_o \beta} \cos \alpha. \quad (26)$$

Η ένταση δίνεται τώρα από την

$$I = \left(\frac{\epsilon_o c}{2} \right) E_R^2 = \left(\frac{\epsilon_o c}{2} \right) \left(\frac{2E_L b}{r_o} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \quad (26a)$$

ή, από την

$$I = 4I_o \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \quad (27)$$

όπου

$$I_o = \left(\frac{\epsilon_o c}{2} \right) \left(\frac{E_L b}{r_o} \right)^2 \quad (27a)$$

όπως καθορίστηκε από την (10) για την απλή σχισμή. Από την (27) φαίνεται ότι η ένταση στο κέντρο είναι τώρα $4I_o$. Αυτό είναι αναμενόμενο όταν οι δέσμες είναι σε φάση και τα πλάτη προστίθενται.

Επιστρέφοντας στην (27) βλέπουμε ότι ο όρος $(\sin \beta / \beta)^2$ αντιστοιχεί στην περίθλαση απλής σχισμής και ο όρος $\cos^2 \alpha$ αντιστοιχεί στη συμβολή των κυμάτων από τις δύο σχισμές. Ο όρος $\cos^2 \alpha$ με τη χρήση της (25) γράφεται :

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \left[\frac{ka(\sin \theta)}{2} \right] = \cos^2 \left[\frac{\pi a(\sin \theta)}{\lambda} \right] \quad (27b)$$

και είναι ισοδύναμη έκφραση με αυτή που προκύπτει στο πείραμα Young.

Οι ημιτονοειδείς όροι της εξίσωσης (27) εμφανίζονται στο Σχήμα 13(a) για την περίπτωση $a=6b$, ή, $\alpha=6\beta$.

Επειδή $a>b$, ο όρος $\cos^2 \alpha$ αλλάζει πιο γρήγορα από τον $(\sin \beta / \beta)^2$. Το γινόμενο των όρων μπορεί να θεωρηθεί ως μια τροποποίηση του πλάτους των κροσσών συμβολής όπως φαίνεται στο Σχήμα 13(b). Η καμπύλη της περίθλασης μηδενίζεται όταν $\beta = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Αναφορικά με τη γωνία θ , αυτή η συνθήκη γίνεται

$$\text{Ελάχιστα περίθλασης: } m\lambda = b \sin \theta \quad (28)$$

Όταν αυτά τα ελάχιστα συμπίπτουν με μέγιστο των κροσσών τότε ο αντίστοιχος κροσσός δεν εμφανίζεται.

Οι κροσσοί συμβολής έχουν μέγιστα για $\alpha = p\pi$, με $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ή όταν

$$\text{Μέγιστα συμβολής: } p\lambda = a \sin \theta \quad (29)$$

Όταν οι συνθήκες (28) και (29) ικανοποιούνται για το ίδιο θ , τότε διαιρώντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε τις συνθήκες για τις απουσιάζουσες τάξεις των κροσσών συμβολής.

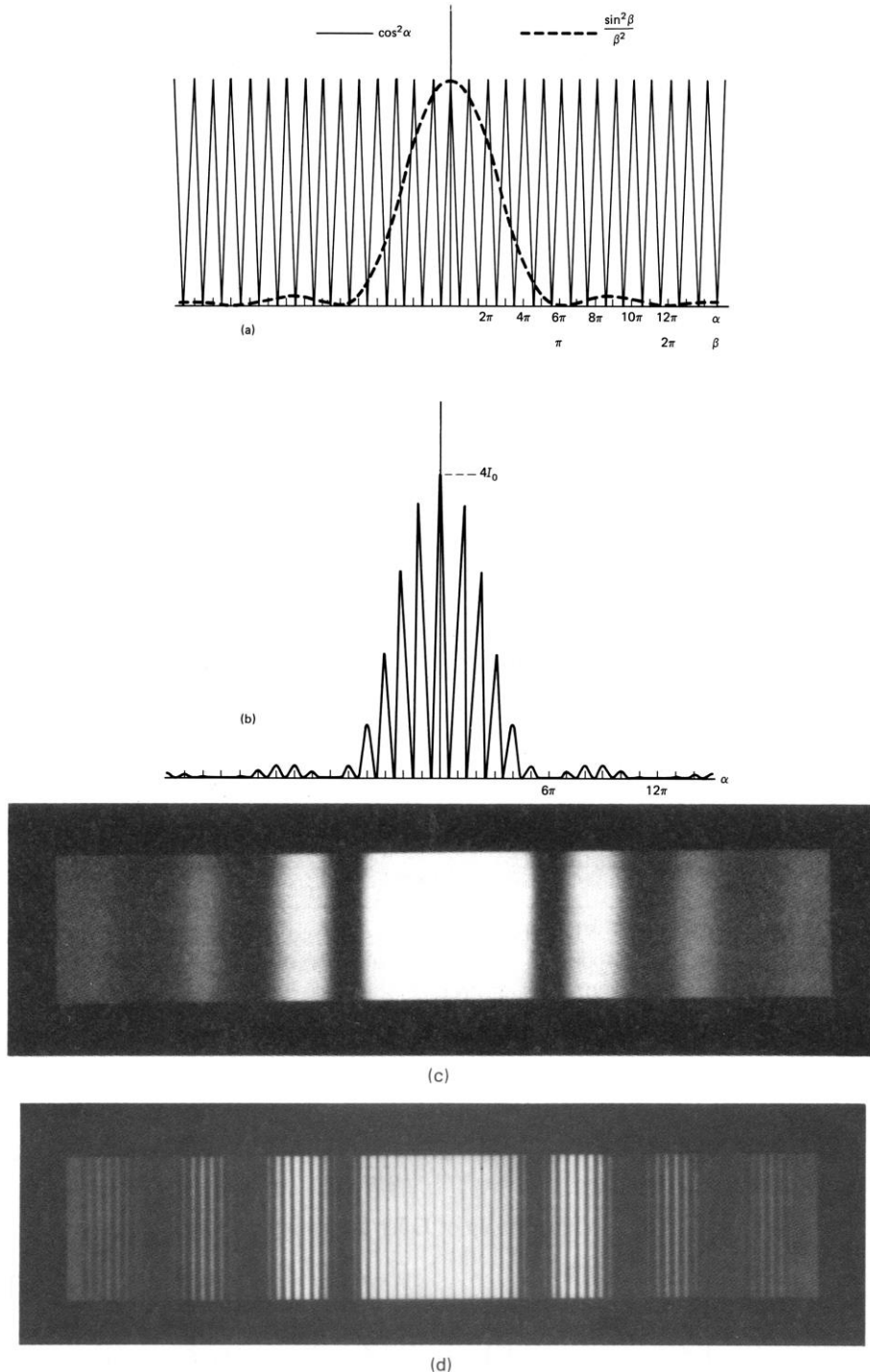
Έτσι, η συνθήκη για μη εμφανιζόμενους κροσσούς είναι

$$a = \left(\frac{p}{m} \right) b \quad (30)$$

ή

$$\alpha = \left(\frac{p}{m} \right) \beta \quad (30a)$$

Επομένως, όταν η απόσταση των σχισμών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του πάχους της μιας σχισμής, τότε η συνθήκη ικανοποιείται. Για παράδειγμα, όταν $a=2b$, τότε $p=2m=\pm 2, \pm 4, \pm 6$ δίνει τις εξαφανισμένες τάξεις της συμβολής. Για το Σχήμα 13(a) έχουμε $a=6b$ και οι χαμένες τάξεις είναι αυτές με $p=\pm 6, \pm 12$ κλπ. Όταν $a=Nb$ και N μεγάλο, τότε η πρώτη τάξη που δεν εμφανίζεται είναι η $p=\pm N$ και είναι μακριά από την κεντρική περιοχή. Επομένως για να πάρουμε συμβολή με το πείραμα Young θα επιλέξουμε $a \gg b$ για να μην επηρεάζονται οι κροσσοί συμβολής από την περίθλαση.



Σχήμα 13: (a) Συναρτήσεις συμβολής (πλήρης γραμμή) και περίθλασης (διακεκομμένη), σχεδιασμένες για μια διπλή σχισμή όταν η απόσταση των σχισμών είναι έξι φορές το πάχος της σχισμής ($a=6b$). (b) Η ένταση

για τη διπλή σχισμή του (a). Η καμπύλη είναι το γινόμενο του αποτελέσματος της συμβολής και της περίθλασης Fraunhofer. (c) Περίθλαση Fraunhofer απλής σχισμής, φωτογραφία. (d) Περίθλαση και συμβολή από διπλή σχισμή με κάθε σχισμή ωσάν αυτή που παρήγαγε τη φωτογραφία του (c).

2.7 Περίθλαση από πολλές σχισμές

Για την περίθλαση από πολλές παράλληλες σχισμές (οπτικό φράγμα, *grating*) η εξίσωση (23) και το Σχήμα 12 επεκτείνονται για να καλυφθούν οι N σχισμές που υποθέτουμε ότι υπάρχουν στο σύστημα. Κάθε j αντιστοιχεί σε μια σχισμή οπότε έχουμε για το πλάτος του κύματος στο πέτασμα:

$$E_R = \frac{E_L}{r_o} \sum_{j=1}^{N/2} \left\{ \int_{l-(2j-1)a-b/2}^{l-(2j-1)a+b/2} e^{isk \sin \theta} ds + \int_{l(2j-1)a-b/2}^{l(2j-1)a+b/2} e^{isk \sin \theta} ds \right\} \quad (31)$$

Καθώς το j αυξάνεται ένα ζεύγος σχισμών τίθεται κάτω από την αρχή του άξονα και επάνω (πρώτο και δεύτερο ολοκλήρωμα). Όταν $j=N/2$ όλες οι σχισμές έχουν υπολογισθεί. Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα έχουμε

$$I = \frac{1}{ik \sin \theta} \left(e^{-ik \sin \theta [(2j-1)a-b]/2} - e^{-ik \sin \theta [(2j-1)a+b]/2} \right) + \frac{1}{ik \sin \theta} \left(e^{ik \sin \theta [(2j-1)a+b]/2} - e^{ik \sin \theta [(2j-1)a-b]/2} \right) \quad (31a)$$

Χρησιμοποιώντας τις (24) και (25) για τα a και β λαμβάνουμε

$$I = \frac{b}{2i\beta} \left(e^{-i(2j-1)\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{i(2j-1)\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \right) \quad (31b)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Euler η (31b) γράφεται

$$I = \frac{b}{2i\beta} (2i \sin \beta) [2 \cos((2j-1)\alpha)] \quad (31c)$$

ή

$$I = 2b \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \operatorname{Re} \left[e^{i(2j-1)\alpha} \right] \quad (31d)$$

όπου το \cos είναι το πραγματικό τμήμα του εκθετικού τμήματος. Επιστρέφοντας στην (31) αθροίζουμε :

$$S = 2b \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{N/2} e^{i(2j-1)\alpha} \right] \quad (31e)$$

και αντικαθιστώντας το άθροισμα παίρνουμε :

$$S = 2b \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha} + e^{i3\alpha} + e^{i5\alpha} + \dots + e^{i(N-1)\alpha} \right] \quad (31f)$$

Η σειρά εντός των αγκυλών είναι μια γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο το $A=e^{i\alpha}$ και λόγο $r=e^{2i\alpha}$, οπότε :

$$A \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) = e^{i\alpha} \left[\frac{(e^{2i\alpha})^{N/2} - 1}{e^{2i\alpha} - 1} \right] = \frac{e^{iN\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} \quad (31g)$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την εξίσωση του Euler η εξίσωση αυτή γράφεται

$$\frac{(\cos N\alpha - 1) + i \sin N\alpha}{2i \sin \alpha} = \frac{i(\cos N\alpha - 1) - \sin N\alpha}{-2 \sin \alpha} \quad (31h)$$

της οποίας το πραγματικό τμήμα είναι $\sin(N\alpha)/(2 \sin(\alpha))$. Τότε

$$S = b \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right) \quad (31i)$$

και

$$E_R = \frac{E_L b}{r_o} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right) \quad (31j)$$

Παίρνοντας το τετράγωνο για την ένταση έχουμε τη σχέση:

$$I = I_o \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (32)$$

όπου το I_o εμπεριέχει όλες τις σταθερές.

Ο παράγων β αντιστοιχεί στη γωνοστή πια περίθλαση και καθορίζει το πλάτος των γραμμών συμβολής.

Ο όρος $\left[\frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right]^2$ καθορίζει την συμβολή μεταξύ των κυμάτων που προέρχονται από τις N σχισμές. Για $\alpha=0$ ή κάποιο πολλαπλάσιο του π , η έκφραση γίνεται απροσδιόριστη. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital για $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ έχουμε

$$\lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{N \cos(N\alpha)}{\cos \alpha} = \pm N \quad (32a)$$

οπότε τα κύρια μέγιστα της συμβολής έχουν πλάτος ανάλογο του N^2 . Η συμβολή για $N=8$ και θετικό α εμφανίζεται στο Σχήμα 14(a). η ένταση εμφανίζεται στο 14(b). Σημειώστε ότι τα κυρίως μέγιστα απέχουν μεταξύ τους κατά $N-2$ μικρά μέγιστα. Η κατάσταση περιγράφεται πλήρως από τις εξισώσεις

$$\text{με } \alpha = \frac{p\pi}{N}, \text{ ή, } a \sin \theta = \frac{p\lambda}{N}, \quad p=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (33)$$

Κύρια μέγιστα έχουμε για $p = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$

Ελάχιστα έχουμε για $p=$ όλες τις άλλες τιμές

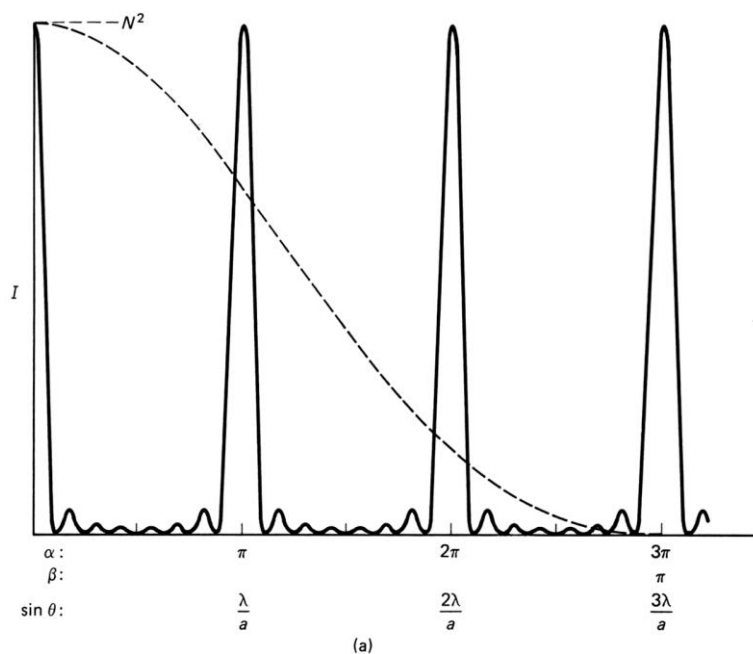
Μία πρακτική διάταξη που χρησιμοποιεί την περίθλαση από πολλές σχισμές είναι το λεγόμενο *οπτικό φράγμα* (diffraction grating), που θα εξετασθεί εκτενώς στο Κεφάλαιο 7.

Σύμφωνα με την εξίσωση (33), κύρια μέγιστα έχουμε για $p/N=m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, οπότε η εξίσωση του οπτικού φράγματος είναι:

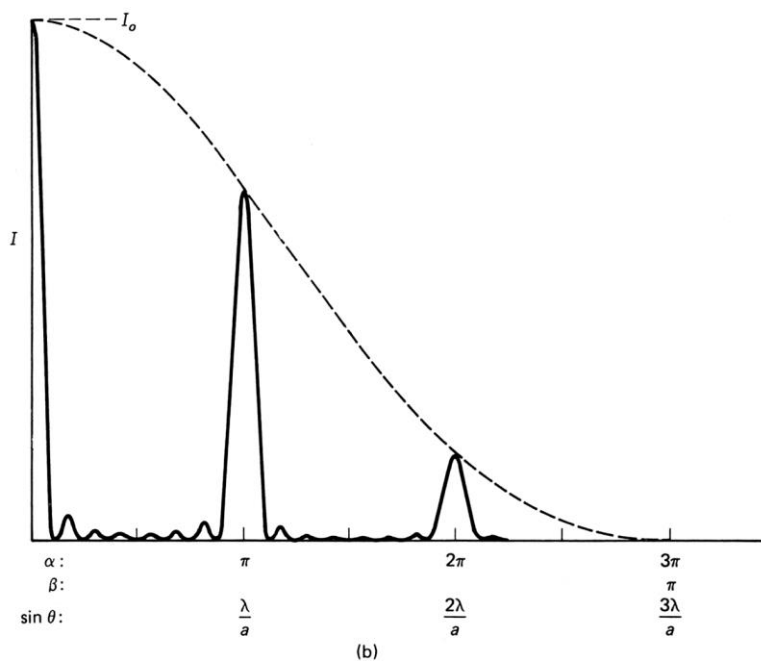
$$m\lambda = a \sin \theta \quad (34)$$

όπου m ονομάζεται τάξη της περίθλασης, με $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a , η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών σχισμών και θ η γωνιακή απόκλιση. Η ίδια εξίσωση βρίσκεται αν αναλύσουμε την καθυστέρηση μεταξύ δύο διαδοχικών κυμάτων από τις σχισμές στο Σχήμα 15. Έχουμε $AB = a \sin \theta$. Αν το AB ισούται με ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, τότε θα έχουμε πρόσθεση των πλατών των κυμάτων και η εξίσωση (34) προκύπτει αμέσως.

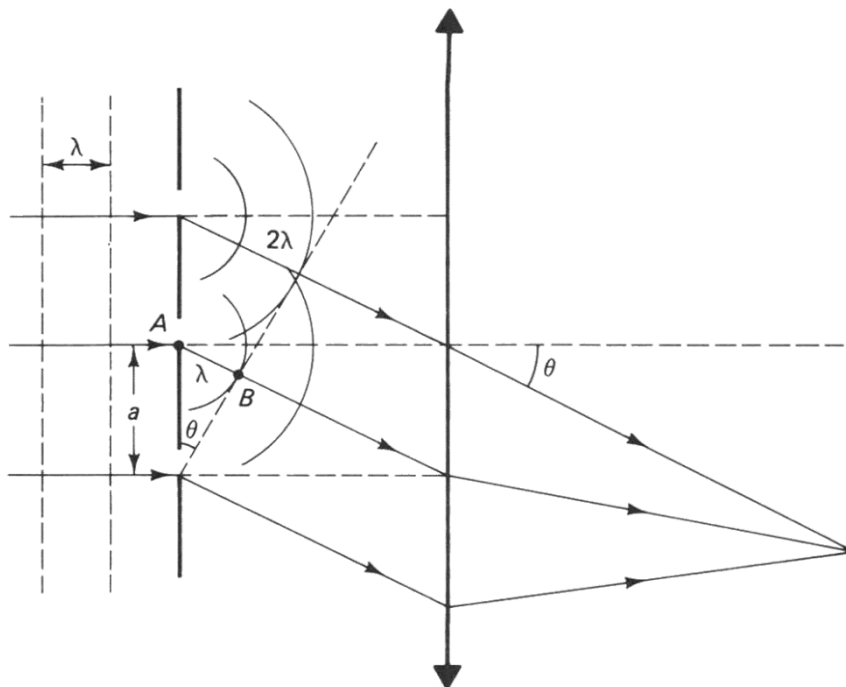
Στην εξίσωση (34) υπάρχει περίπτωση το $a \sin \theta$ να ισούται με διάφορους συνδυασμούς του γινομένου $m\lambda$. Για παράδειγμα το λ στην πρώτη τάξη να συμπίπτει με το $\lambda/2$ στη δεύτερη τάξη και ούτω καθ' εξής. Το οπτικό φράγμα παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον από πλευράς ανάλυσης ενός φάσματος και διακριτικής ικανότητας γι' αυτό θα αναφερθούμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 7.



Σχήμα 14. (a) Συναρτήσεις συμβολής (πλήρης γραμμή) και περίθλασης (διακεκομμένη γραμμή) Fraunhofer όταν $N=8$ και $a=3b$.



Σχήμα 14(συνέχεια) (b) Η προκύπτουσα ένταση για την περίπτωση (a). Η ένταση περιορίζεται από την ύπαρξη της περίθλασης (διακεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 15. Διάγραμμα οπτικού φράγματος που φωτίζεται από ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα. Φαίνεται ο σχηματισμός ενός πρώτης τάξεως μεγίστου.

3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Για την μελέτη του φαινομένου της περίθλασης Fraunhofer, θα χρησιμοποιήσουμε:

- Ένα laser He-Ne
- Απλές σχισμές διαφόρων διαστάσεων
- Διπλές σχισμές
- Κυκλικές οπές
- Πολλαπλές σχισμές
- Πλέγματα
- Πέτασμα βαθμονομημένο
- Ανιχνευτή έντασης
- Φακό εστίασης

4. Εκτέλεση του πειράματος

4.1 Περίθλαση από λεπτή σχισμή

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη για τα ελάχιστα της έντασης, $b \sin \theta = m\lambda$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου b ο πλάτος της σχισμής και 2θ η γωνία που σχηματίζει η σχισμή με τα δύο πρώτα ελάχιστα, για να προσδιορίσετε το πλάτος της σχισμής b . Δίδεται $\lambda = 632.8 \text{ nm}$.

Πάρτε αρκετές μετρήσεις για να βρείτε μέσο όρο του b για διάφορες τάξεις m .

4.2 Υπολογισμός απόστασης όπου ισχύει η περίθλαση Fraunhofer.

Υπολογίστε αν η θέση της απόστασης του πετάσματος από το επίπεδο της σχισμής πληροί τη συνθήκη για περίθλαση Fraunhofer. Αν όχι, επαναλάβετε τη μέτρηση (α).

$$L \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

4.3 Με το φωτόμετρο μετρήστε και καταγράψτε την κατανομή της έντασης.

Σχολιάστε αν η ένταση έχει μορφή *sinc*.

4.4 Περίθλαση από κυκλική οπή.

Από τη θέση των ελαχίστων (δύο πρώτων) προσδιορίστε τη γωνία $\Delta\theta$ του δίσκου Airy και από αυτή το άνοιγμα της κυκλικής οπής D .

$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

4.5 Κριτήριο Rayleigh

Σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh η ελάχιστη απόσταση για την διάκριση δύο δίσκων Airy είναι (βλέπε και Σχήμα 10)

$$\Delta\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D}$$

Για το μήκος $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ του laser He-Ne υπολογίστε το $\Delta\theta_{\min}$ για το άνοιγμα της ίριδας του οφθαλμού ($D=2\text{mm}$) καθώς και την απόσταση δύο σημείων που μπορείτε να διακρίνετε στο 1m.

4.6 Περίθλαση – συμβολή από δύο σχισμές.

1. Παρατηρήστε την κατανομή της έντασης και σχολιάστε το φαινόμενο.
2. Από τις μη εμφανιζόμενες τάξεις της συμβολής και το πάχος της σχισμής που βρήκατε ήδη, υπολογίστε την απόσταση των σχισμών - βλέπετε Σχήμα 12 και εξισώσεις (28) - (30).

4.7 Περίθλαση από πολλές σχισμές.

1. Παρατηρήστε την κατανομή των εντάσεων στο χώρο και σχολιάστε όταν φωτίζεται το οπτικό φράγμα από ένα laser He-Ne. Σχολιάστε.
2. Από την εξίσωση του οπτικού φράγματος (34) υπολογίστε την απόσταση μεταξύ δύο σχισμών και τον αριθμό των σχισμών/mm, μετρώντας τη γωνία θ μεταξύ των τάξεων $m=0$ και $m = \pm 1$.
 $m\lambda = a \sin \theta$ (34) όπου m η τάξη της περίθλασης και a η απόσταση δύο διαδοχικών σχισμών (Σχήμα 15).

5. Προβλήματα

1. Τα δύο φώτα ενός αυτοκινήτου απέχουν 1m. Από πόσο μακριά μπορεί να τα ξεχωρίσει ένας άνθρωπος με ίριδα 5mm; Υποθέστε μέσο μήκος κύματος 555nm.
2. Το Αστεροσκοπείο του Σκίνακα του Πανεπιστημίου Κρήτης έχει ένα τηλεσκόπιο με άνοιγμα φακού 1m και εστιακή απόσταση 10m. Υπολογίστε την ακτίνα του πρώτου και του δεύτερου δακτυλίου του δίσκου Airy που σχηματίζεται από ένα αστέρι στο εστιακό επίπεδο. Τα πρώτα δύο δευτερεύοντα μέγιστα της συνάρτησης $[J_1(\gamma)/\gamma]^2$ λαμβάνουν χώρο για $\gamma=5.14$ και $\gamma=8.42$.
3. Ένα CO₂ laser παράγει ακτίνα 10.6μm διαμέτρου 1mm και ισχύος 2KW. Στην έξοδο το άνοιγμα της δέσμης περιορίζεται μόνο από την περίθλαση και λόγω ταλάντωσης σε πολλές συχνότητες και χωρικές κατανομές η ένταση στην έξοδο είναι ομοιόμορφη. Υπολογίστε τη διάμετρο της επιφάνειας που θα έχει το laser όταν φθάσει στη Σελήνη η οποία απέχει 376.000km. Ποια θα είναι η αντίστοιχη ένταση στην εκεί επιφάνεια; Αν χρησιμοποιηθεί ένα τηλεσκόπιο μετά το laser που μεγεθύνει τη δέσμη στο 1m διάμετρο πόση θα είναι η αντίστοιχη διάμετρος της δέσμης στη Σελήνη;

Βιβλιογραφία

- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993.
- Born, Max and Emil Wolf. Principles of Optics, 5th ed. New York: Pergamon Press, 1975
- 3. Goodman, Joseph W. Introduction to Fourier Optics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π. Ρακιτζής, 2014. «Εργαστήριο Φυσικής III - Οπτική». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

