# ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

**Ἀσκήσεις τῆς $2^{\eta\varsigma}$ ἑβδομάδας**

Τὸ σύμβολο $(a,b)$, ὅπου $a,b \in \mathbb{Z}$, συμβολίζει τὸν ΜΚΔ τῶν $a,b$

1. Στὴν ἄσκηση αὐτὴ τὰ γράμματα $a,b,c,d,k,n$ παριστάνουν ἀκεραίους.

   (α′) Ἂν $(a,b)=1$, $c|a$ καὶ $d|b$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $(c,d)=1$.

   (β′) Ἂν $(a,b)=(a,c)=1$, τότε $(a,bc)$=1.

   (γ′) Ἂν $(a,b)=d$, τότε $(a/d\,,\,b/d)=1$.

   (δ′) Ἂν $(a,b)=1$ καὶ $n,k\geq 1$, τότε $(a^n,b^k)=1$.

   (ε′) Ἂν $(a,b)=1$ καὶ $d|a+b$, τότε $(a,d)=(b,d)=1$.

   (ϛ′) Ἂν $(a,b)=1$, τότε

   $$(a+b,a-b)=\begin{cases}1 & \text{ἂν ὁ ἕνας ἀπ' τοὺς } a,b \text{ εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ ἄλλος περιττός}\\ 2 & \text{ἂν οἱ } a,b \text{ εἶναι, καὶ οἱ δύο, περιττοί.}\end{cases}$$

   (ζ′) Ἂν $(a,b)=1$, τότε

   $$(a-b,a^2+ab+b^2)=\begin{cases}1 & \text{ἂν τὸ 3 δὲν διαιρεῖ τὸ } a-b\\ 3 & \text{ἂν τὸ 3 διαιρεῖ τὸ } a-b.\end{cases}$$

   Ὑπόδειξη: Παρατηρῆστε ὅτι $a^2+ab+b^2=(a-b)^2+3ab$ καὶ ὅτι κανένας πρῶτος $\neq 3$ δὲν μπορεῖ νὰ διαιρεῖ συγχρόνως τὸν $a-b$ καὶ τὸν $(a-b)^2+3ab$. Στὴν περίπτωση ποὺ ὁ $a-b$ διαιρεῖται διὰ 3, πρέπει νὰ δείξετε, ἐπιπλέον, ὅτι ὁ $(a-b)^2+3ab$ διαιρεῖται ἀπὸ τὸ 3, ἀλλὰ ὄχι ἀπὸ τὸ 9.

2. Ἂν τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων μὲ θετικοὺς παρονομαστὲς εἶναι ἀκέραιος, τότε οἱ παρονομαστές τους εἶναι ἴσοι.

3. Ἔστω ὅτι $p^4|a^3$ καὶ ὁ $p$ εἶναι πρῶτος. Ἀποδεῖξτε ὅτι $p^6|a^3$.

4. (α′) Ὑπολογῖστε τὸν μικρότερο θετικὸ ἀκέραιο $x$ μὲ τὴν ἰδιότητα: $3960x =$ τέλειο τετράγωνο (= τετράγωνο ἀκεραίου).
   (β′) Ὑπολογῖστε τὸν μικρότερο θετικὸ ἀκέραιο $x$ μὲ τὴν ἰδιότητα: $525x =$ τέλειος κύβος (= κύβος ἀκεραίου).

5. Νὰ βρεῖτε ὅλες τὶς λύσεις τῆς ἐξίσωσης $xy=10^{21}30^{20}$ σὲ ἀκεραίους $x,y$ μὲ $1<x<y$ καὶ $(x,y)=2250$.
   Ὑπόδειξη: Κάνετε χρήση τοῦ θεωρήματος μονοσήμαντης ἀνάλυσης σὲ πρώτους παράγοντες.

6. Γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω ζευγάρια $a,b$ ὑπολογῖστε τὸν $d=(a,b)$, καθὼς καὶ ἀκεραίους $x_0$, $y_0$, τέτοιους ὥστε $ax_0+by_0=d$.
   (α′) $a=3989$, $b=1901$ (β′) $a=6727$, $b=3584$
   (γ′) $a=2431$, $b=1717$ (δ′) $a=54321$, $b=12345$.

7. Νὰ λυθοῦν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις σὲ θετικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς $x, y$ πρώτους μεταξύ τους.

   (α′) $x^2 - y^2 = 135$
   Ὑπόδειξη: Παρατηρῆστε ὅτι ὁ ἕνας ἀπ' τοὺς $x, y$ πρέπει νὰ εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ ἄλλος περιττός, καὶ χρησιμοποιεῖστε τὴν ἄσκηση 1(ϛ′).

   (β′) $x^2 - y^2 = 72$
   Ὑπόδειξη: Παρατηρῆστε ὅτι οἱ $x, y$ πρέπει νὰ εἶναι καὶ οἱ δύο περιττοί, καὶ χρησιμοποιεῖστε τὴν ἄσκηση 1(ϛ′).

   (γ′) $x^3 - y^3 = 721$
   Ὑπόδειξη: Παρατηρῆστε ὅτι ὁ $x - y$ δὲν διαιρεῖται διὰ 3 καὶ χρησιμοποιεῖστε τὴν ἄσκηση 1(ζ′).

   (δ′) $x^3 - y^3 = 3087$
   Ὑπόδειξη: Παρατηρῆστε ὅτι ὁ $x - y$ διαιρεῖται διὰ 3 καὶ χρησιμοποιεῖστε τὴν ἄσκηση 1(ζ′).

Ἐπιλογὴ ἀπὸ τὶς ἀσκήσεις τῆς ἑνότητας 1.2 τοῦ βιβλίου [1]

8. Ἂν ὁ $p$ εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς καὶ οἱ $a, n$ εἶναι ἀκέραιοι, $n \geq 1$ καὶ $p|a^n$, τότε $p^n|a^n$.

9. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀκέραιος $a > 1$ γιὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει $(a, a + 3) = a$;

10. Γιὰ ὅλους τοὺς ἀκεραίους $m, n, k$ ἰσχύει $(m + kn, n) = (m, n)$.

11. Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε ἀκέραιο $n$ ἰσχύει $(3n + 1, 10n + 3) = 1$.

12. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐλάχιστο θετικὸ στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\{24a + 36b \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$;

13. Ποιὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω συνεπαγωγὲς εἶναι σωστές; Ἀποδεῖξτε τὶς σωστὲς καὶ δῶστε ἕνα ἀντιπαράδειγμα γιὰ τὶς λανθασμένες.

   - $a|b^n \Rightarrow a|b$.
   - $a^n|b^n \Rightarrow a|b$.
   - $a^n|b \Rightarrow a|b$.

14. Ἔστω θετικὸς ἀκέραιος $a$, ὁ ὁποῖος *δὲν* εἶναι τετράγωνο ἀκεραίου. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\sqrt{a}$ *δὲν* εἶναι ρητός.
   Ὑπόδειξη: Ἔστω ὅτι εἶναι $\sqrt{a} = m/n$, ὅπου ὑποθέτομε ὅτι τὸ κλάσμα $m/n$ εἶναι ἀνάγωγο, δηλαδή, $(m, n) = 1$. Παρατηρῆστε ὅτι $n^2 a = m^2$ $(*)$. Ἀφοῦ $a > 1$ καὶ ὁ $a$ δὲν εἶναι τέλειο τετράγωνο, ἕπεται ὅτι στὴν κανονικὴ ἀνάλυση τοῦ $a$ ἐμφανίζεται ἕνας τουλάχιστον πρῶτος $p$ μὲ ἐκθέτη περιττό. Αὐτὸς ὁ $p$ διαιρεῖ τὸν $m$ (αἰτιολογῆστε), ἄρα στὴν κανονικὴ ἀνάλυση τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς $(*)$ ὁ $p$ ἐμφανίζεται μὲ ἐκθέτη ἄρτιο. Παρατηρῆστε, τέλος, ὅτι ὁ ἐκθέτης τοῦ $p$ στὸ ἀριστερὸ μέλος εἶναι περιττός· ἀντίφαση.

# Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ′ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.