

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2015-2016

Βασική περιγραφή τῶν θεμάτων ποὺ συζητήθηκαν τὴν 3^η ἑβδομάδα
(Δὲν πρόκειται γιὰ λεπτομερῆ περιγραφή.)

- **Γενικευμένη ἀνάλυση σὲ πρώτους.** Ἐστω \mathbb{P} τὸ σύνολο τῶν πρώτων. Ἄν $p \in \mathbb{P}$ καὶ $p|a$, τότε μὲ $\epsilon_p(a)$ συμβολίζομε τὸν ἐκθέτη τοῦ p στὴν κανονικὴ ἀνάλυση τοῦ a . Ἄν $p \nmid a$, τότε θέτομε $\epsilon_p(a) = 0$.

Παράδειγμα: $a = 247401 = 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17$. Ἐδῶ, $\epsilon_2(a) = 0$, $\epsilon_3(a) = 3$, $\epsilon_5(a) = 0$, $\epsilon_7(a) = 2$, $\epsilon_{11}(a) = 1$, $\epsilon_{13}(a) = 0$, $\epsilon_{17}(a) = 1$, $\epsilon_p(a) = 0 \forall p \in \mathbb{P}, p \geq 19$. Ἐπίσης, $\epsilon_p(1) = 0$ γιὰ κάθε $p \in \mathbb{P}$.

Ἐτσι, κάθε ἀκέραιος $a \geq 1$ ἀναλύεται σὲ γινόμενο πρώτων ὡς ἑξῆς:

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\epsilon_p(a)}.$$

- **Πρόταση 1.** Ἄν a, b εἶναι ἀκέραιοι ≥ 1 , τότε $a|b$ ἂν καὶ μόνο ἂν, $\epsilon_p(a) \leq \epsilon_p(b)$ γιὰ κάθε πρῶτο p .

- **Πρόταση 2.** Ἐστω $a, b \geq 1$. Τότε, γιὰ κάθε $p \in \mathbb{P}$ ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

1. $\epsilon_p(\text{ΜΚΔ}(a, b)) = \min\{\epsilon_p(a), \epsilon_p(b)\}$.

2. $\epsilon_p(\text{ΕΚΠ}(a, b)) = \max\{\epsilon_p(a), \epsilon_p(b)\}$.

3. $\text{ΜΚΔ}(a, b) \cdot \text{ΕΚΠ}(a, b) = ab$.

- **Ἴσοτιμίες.** Ἐνότητα 1.3 τοῦ συγγράμματος [1]
- **Οἱ Ἀκέραιοι mod m .** Τὸ σύνολο \mathbb{Z}_m τῶν κλάσεων ἀκεραίων mod m . Ἐνότητα 1.4 τοῦ συγγράμματος [1]. Πέραν τῶν βασικῶν γνώσεων, ἔμφαση δόθηκε στὰ ἑξῆς:

- **Πρόταση 3.** Ἡ κλάση $[a] \in \mathbb{Z}_m$ εἶναι ἀντιστρέψιμη ἂν, καὶ μόνο ἂν, $(a, m) = 1$.

- **Πρόταση 4.** Ἐστω $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_m$ καὶ $[a][c] = [b][c]$. Ἄν $(c, m) = 1$, τότε $[a] = [b]$.

Άναφορές

- [1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.