ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς 3^{ης} ἑβδομάδας

15. (α$'$) Ἂν $b \in \mathbb{Z}$, ἐξετᾶστε ποιὰ εἶναι τα πιθανὰ ὑπόλοιπα τοῦ b^2 διὰ 3.

    (β$'$) Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε φυσικὸ n, ὁ ἀριθμὸς $a = 17 \cdot 3^{2n+1} + 41n^2 \cdot 3^{n+1} + 2$ δὲν εἶναι τετράγωνο ἀκεραίου.

16. (α$'$) Ἂν $b \in \mathbb{Z}$, ἐξετᾶστε ποιὰ εἶναι τα πιθανὰ ὑπόλοιπα τοῦ b^2 διὰ 5.

    (β$'$) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $a = 12345066777111145890342$ δὲν εἶναι τετράγωνο ἀκεραίου.

17. (α$'$) Ἂν $b \in \mathbb{Z}$, ἐξετᾶστε ποιὰ εἶναι τα πιθανὰ ὑπόλοιπα τοῦ b^3 διὰ 7.

    (β$'$) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $a = 7\underbrace{00\cdots00}_{\text{ὁσαδήποτε}}3$ δὲν εἶναι κῦβος ἀκεραίου.

    (γ$'$) Ἀποδεῖξτε (χωρὶς πράξεις!) ὅτι ὁ ἀριθμὸς 7000000070000002013 δὲν εἶναι κῦβος ἀκεραίου.

Ἀρκετὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀσκήσεις εἶναι ἀπὸ τὴν ἑνότητα 1.3 τοῦ βιβλίου [1].

18. (α$'$) Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε περιττὸ a ἰσχύει $a^2 \equiv 1 \pmod 8$.

    (β$'$) Ἔστω ἕνας ἀκέραιος a γραμμένος στὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀρίθμησης (φανταστεῖτε τον μὲ 4 τοὐλάχιστον ψηφία) καὶ a_0 ὁ ἀριθμὸς, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰ 3 τελευταῖα ψηφία του. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης τοῦ a διὰ 8 εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης τοῦ a_0 διὰ 8.

    (γ$'$) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 201340168052123987111222893 δὲν εἶναι τετράγωνο ἀκεραίου, δίχως (φυσικά!) νὰ κάνετε ὑπολογισμούς.

    (δ$'$) Ἀποδεῖξτε ὅτι κανεὶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς 3^m+3^n+1, μὲ m, n μὴ ἀρνητικοὺς ἀκεραίους, δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι τετράγωνο ἀκεραίου.

19. Ἀποδεῖξτε ὅτι, γιὰ κανένα φυσικὸ ἀριθμὸ n δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ὁ $(n+1)^{2n} + 4n^{2n+1}$ πολλαπλάσιο τοῦ 3.

20. Ἂν οἱ m, n εἶναι θετικοὶ περιττοὶ ἀκέραιοι, ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ $1^m + 2^m + \cdots + (n-2)^m + (n-1)^m$ εἶναι διαιρετὸς διὰ n.

    Ὑπόδειξη: Μιμηθεῖτε τὸν ὀκτάχρονο Gauss: Ἔστω $S = 1^m + 2^m + \cdots + (n-2)^m + (n-1)^m$. Προφανῶς, $S = (n-1)^m + (n-2)^m + \cdots + 2^m + 1^m$. Δεῖτε αὐτὲς τὶς σχέσεις ὡς ἰσοτιμίες mod n καὶ προσθτε κατὰ μέλη.

21. *Ὑπενθύμιση: Ἂν* $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ *εἶναι, ἀντιστοίχως, τὰ ψηφία τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, ... τοῦ θετικοῦ ἀκεραίου* A *(*$0 \le a_i \le 9$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$*),*[1] *τότε*
$A = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + a_n 10^n$.
Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:

(α΄) $A \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod 9$ καὶ $A \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod 3$. Ποιὰ εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τοῦ $A = 3\underbrace{88\cdots88}_{2015\ \text{ψηφία}}2$ διὰ 9 καὶ 3, ἀντιστοίχως;

(β΄) Ἂν χωρίσομε τὰ ψηφία τοῦ A ἀνὰ δύο, ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τ' ἀριστερά, σχηματίζοντας τοὺς ἀκεραίους $\overline{a_1a_0}$, $\overline{a_3a_2}$, $\overline{a_5a_4}$ κλπ καὶ σχηματίσομε τὸν ἀριθμὸ $B = \overline{a_1a_0} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} + \cdots$, τότε $A \equiv B \pmod{11}$. Γιὰ παράδειγμα, ἂν $A = 23896782$, τότε $B = 82+67+89+23$, ἐνῶ, ἂν $A = 523896782 = 0523896782$, τότε $B = 82+67+89+23+05 = 82+67+89+23+5$.
Ποιὸ εἶναι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης τοῦ $A = \underbrace{44\cdots44}_{2015\ \text{ψηφία}}$ διὰ 11;

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.

[1] Ὅταν τὰ a_i δὲν εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί, γράφομε $A = \overline{a_n \dots a_1a_0}$ καὶ ὄχι $A = a_n \dots a_1a_0$, καθὼς αὐτὴ ἡ τελευταία γραφὴ ὑπάρχει κίνδυνος νὰ ἐκληφθεῖ ὡς τὸ γινόμενο $a_n \cdots a_1 \cdot a_0$.