

ΑΛΓΕΒΡΑ
Χειμερινό Έξάμηνο 2015-2016
Καθηγητής Ν. Γ. Τζανάκης

Άσκήσεις τής 4^{ης} εβδομάδας

22. 29630 ώρες μετά τις 5 τὰ ξημερώματα, τί ώρα θα είναι;
23. Υπολογίστε όλους τους άκεραίους x του διαστήματος $[-100, 100]$, που ικανοποιούν την ίσοτιμία $4x \equiv 5 \pmod{27}$.
24. Ποιοι άκεραίοι του διαστήματος $[-100, 400]$ έχουν την ιδιότητα, διαιρούμενοι δια 11 να αφήνουν υπόλοιπο 2 και διαιρούμενοι δια 13 να αφήνουν υπόλοιπο 3;
25. Οί μαθητές ενός Λυκείου είναι μεταξύ 150 και 200 τόν αριθμό. Στις πρόβες για την παρέλαση περισσεύουν 2, αν ό γυμναστής τους τοποθετήσει σε όκτάδες, ενώ περισσεύει ένας, αν τους τοποθετήσει σε πεντάδες. Πόσοι είναι οί μαθητές;
26. Ποιό είναι τó υπόλοιπο τής διαίρεση του 150^{1203} δια 143;
27. Ποιές από τις παρακάτω κλάσεις έχουν αντίστροφη; (Άπαντήσετε δίχως πράξεις.)
Για όσες έχουν αντίστροφη, υπολογίστε (με πράξεις, φυσικά) τήν αντίστροφή τους.

$$\begin{array}{llll} [15] \in \mathbb{Z}_{2010}, & [3] \in \mathbb{Z}_{17}, & [4] \in \mathbb{Z}_{21}, & [6] \in \mathbb{Z}_{15} \\ [7] \in \mathbb{Z}_{11}, & [7] \in \mathbb{Z}_{36}, & [86] \in \mathbb{Z}_{128}, & [19] \in \mathbb{Z}_{2015} \\ [103] \in \mathbb{Z}_{2015}, & [65] \in \mathbb{Z}_{2015}, & [123] \in \mathbb{Z}_{2048} & [13] \in \mathbb{Z}_{2015}. \end{array}$$

28. (α') Έστω $m + 1 = nk$. Ποιά είναι ή $[n]^{-1}$ στο \mathbb{Z}_m ; Στο \mathbb{Z}_{2015} ποιά είναι ή αντίστροφη κλάση τής [63];
- (β') Έστω $m - 1 = nk$. Ποιά είναι ή $[n]^{-1}$ στο \mathbb{Z}_m ; Στο \mathbb{Z}_{2015} ποιά είναι ή αντίστροφη κλάση τής [53];
29. Βρείτε κλάση $[g] \in \mathbb{Z}_{18}^*$, τέτοια ώστε, κάθε κλάση $\in \mathbb{Z}_{18}^*$ να είναι δύναμη τής $[g]$. Άποδείξτε (με πράξεις) ότι κάτι ανάλογο είναι άδύνατο για τó \mathbb{Z}_{15}^* .

30. Άποδείξτε ότι

$$\phi(2m) = \begin{cases} \phi(n) & \text{αν } \acute{o} \ n \ \text{είναι περιττός} \\ 2\phi(n) & \text{αν } \acute{o} \ n \ \text{είναι άρτιος} \end{cases}$$

31. Έστω ότι $(a, m) = 1$ και $(a - 1, m) = 1$. Άποδείξτε ότι

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{\phi(m)-1} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Άναφορές

- [1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ' Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.