Αλγεβρα Ι

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινὸ ἑξάμηνο 2015-2016

Βασικὴ περιγραφὴ τῶν θεμάτων ποὺ συζητήθηκαν τὴν 5^{η} ἑβδομάδα

(Δὲν πρόκειται γιὰ λεπτομερῆ περιγραφή.)

• **Δακτύλιος**: Ἕνα μὴ κενὸ σύνολο R, ἐφοδιασμένο μὲ δύο πράξεις $+$ (ποὺ λέγεται "πρόσθεση") καὶ $\cdot$ (ποὺ λέγεται "πολλαπλασιασμός") λέμε πὼς εἶναι δακτύλιος, ἂν οἱ πράξεις του ἱκανοποιοῦν τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

1. $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in R$ (προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τῆς πρόσθεσης).
2. $a+b = b+a \quad \forall a,b \in R$ (μεταθετικὴ ἰδιότητα τῆς πρόσθεσης).
3. $\exists\, 0_R \in R: \; a+0_R = a = 0_R + a \quad \forall a \in R$. Τὸ στοιχεῖο αὐτὸ ὀνομάζεται "μηδενικὸ στοιχεῖο τοῦ R".
4. Γιὰ κάθε $a \in R$ ὑπάρχει $a' \in R$ τέτοιο ὥστε $a + a' = 0_R = a' + a$. Ἕνα τέτοιο στοιχεῖο a' χαρακτηρίζεται ὡς "ἀντίθετο στοιχεῖο τοῦ a".
5. $(a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) \quad \forall a,b,c \in R$ (προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).
6. $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ καὶ $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$, γιὰ ὅλα τὰ $a,b,c \in R$ (ἀριστερὴ καὶ δεξιὰ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα).

Ἂν ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι μεταθετικὴ πράξη, δηλαδή, $a\cdot b = b\cdot a$ γιὰ κάθε $a,b \in R$, ὁ R χαρακτηρίζεται *μεταθετικὸς δακτύλιος*.

Ἂν ὑπάρχει $e \in R$, τέτοιο ὥστε $e\cdot a = a = a\cdot e$, τότε τὸ e χαρακτηρίζεται ὡς *μοναδιαῖο στοιχεῖο* τοῦ R καὶ λέμε ὅτι ὁ R εἶναι δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο στοιχεῖο.

Ἀναφερόμενοι στὸν παραπάνω ὁρισμό, ἔχομε τὴν ἑξῆς πρόταση:

• **Πρόταση 1.** *(1) Τὸ μηδενικὸ στοιχεῖο 0_R εἶναι μοναδικό.*
(2) Γιὰ κάθε a, ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα ἀντίστροφο, καὶ συμβολίζεται $-a$. Υἱοθετοῦμε τὴν ἑξῆς συντομογραφία: Ἀντὶ $a+(-b)$ θὰ γράφομε (συνήθως, δίχως νὰ εἶναι ὑποχρεωτικό) $a-b$. Δηλαδή, ἐξ ὁρισμοῦ, $a-b = a+(-b)$.

(3) Νόμος τῆς διαγραφῆς στὴν πρόσθεση: Ἂν $a+c=b+c$, τότε $a=b$. Ἂν $c+a=c+b$, τότε $a=b$.
(4) Ἂν $a+b=0_R$, τότε $b=-a$.
(5) $-(-a)=a$.
(6) $-(a+b)=(-a)+(-b)=$ (ἐξ ὁρισμοῦ) $-a-b$.
(7) $a\cdot 0_R=0_R=0_R\cdot a$.
(8) $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)=a\cdot(-b)$.
(9) $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.
(10) Ἂν ὁ δακτύλιος ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο, δηλαδή, στοιχεῖο e, τέτοιο ὥστε $a\cdot e=e\cdot a$ γιὰ ὅλα τὰ στοιχεῖα a, τότε αὐτὸ εἶναι μοναδικὸ καὶ συμβολίζεται 1_R.

• **Μηδενοδιαιρέτες δακτυλίου** R. Τὸ *μὴ μηδενικὸ* $a\in R$ χαρακτηρίζεται ἀριστερὸς μηδενοδιαιρέτης τοῦ R ἂν ὑπάρχει *μὴ μηδενικὸ* $b\in R$, τέτοιο ὥστε $a\cdot b=0_R$. Ἐντελῶς ἀνάλογα, τὸ *μὴ μηδενικὸ* $a\in R$ χαρακτηρίζεται δεξιὸς μηδενοδιαιρέτης τοῦ R ἂν ὑπάρχει *μὴ μηδενικὸ* $b\in R$, τέτοιο ὥστε $b\cdot a=0_R$. Ἂν ὁ R εἶναι μεταθετικὸς δακτύλιος, οἱ προσδιορισμοὶ "ἀριστερὸς" καὶ "δεξιὸς" περιττεύουν.
• **Ἀκέραια Περιοχή**. Μεταθετικὸς δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο, στὸν ὁποῖο δὲν ὑπάρχουν μηδενοδιαιρέτες.

• **Πρόταση 2.** *Ὁ δακτύλιος $\mathbb{Z}_m$ ($m>1$) εἶναι ἀκέραια περιοχὴ ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ m εἶναι πρῶτος.*

• **Σῶμα**. Μεταθετικὸς δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο, κάθε μὴ μηδενικὸ στοιχεῖο τοῦ ὁποίου ἔχει ἀντίστροφο. Στὴν παρακάτω εἰδικὴ (ἀλλὰ ὄχι ἀσυνήθη) περίπτωση, ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφο:

• **Πρόταση 3.** *Κάθε σῶμα εἶναι ἀκέραια περιοχή.*

Τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει ἐν γένει: Γιὰ παράδειγμα, ὁ δακτύλιος $\mathbb{Z}$ εἶναι ἀκέραια περιοχὴ ἀλλὰ δὲν εἶναι σῶμα.

• **Πρόταση 4.** *Κάθε πεπερασμένη ἀκέραια περιοχὴ εἶναι σῶμα.*

• **Πόρισμα 5.** *Ὁ δακτύλιος $\mathbb{Z}_m$ ($m>1$) εἶναι σῶμα ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ m εἶναι πρῶτος.*

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.