



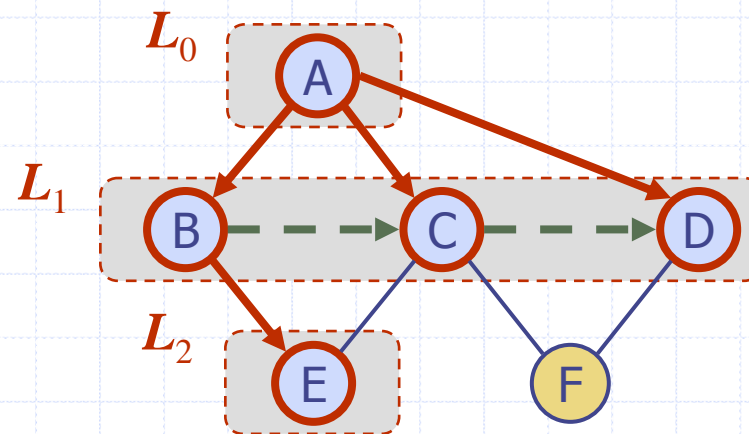
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

Οριζόντια διερεύνηση

Ιωάννης Τόλλης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Οριζόντια διερεύνηση Breadth First Search



Περιεχόμενα

◆ Οριζόντια διερεύνηση

- Αλγόριθμος
- Παραδείγματα
- Ιδιότητες
- Ανάλυση
- Εφαρμογές

◆ DFS vs. BFS

- Σύγκριση Εφαρμογών
- Σύγκριση των Ετικετών των Ακμών

Breadth-First Search

- ◆ Η οριζόντια διερεύνηση (BFS) είναι μια γενική τεχνική για την διάσχιση ενός γράφου
- ◆ Μία BFS διάσχιση ενός γράφου G
 - Επισκέπτεται όλες τις κορυφές (vertices) και τις ακμές (edges) του G
 - Καθορίζει κατά πόσο ο G είναι συνδεδεμένος
 - Υπολογίζει τις συνδεδεμένες συνιστώσες του G
 - Υπολογίζει ένα δάσος συνδετικών δένδρων του G
- ◆ Ο BFS σε ένα γράφο με n κορυφές (vertices) και m ακμές (edges) παίρνει χρόνο $O(n + m)$
- ◆ Ο BFS μπορεί να επεκταθεί ώστε να λύσει άλλα προβλήματα γράφων
 - Βρίσκει και εκθέτει ένα μονοπάτι με το μικρότερο αριθμό από ακμών μεταξύ 2 δοθέντων κορυφών
 - Βρίσκει ένα απλό κύκλο αν υπάρχει

Αλγόριθμος BFS

- ◆ Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί ένα μηχανισμό για να καθορίζει και να παίρνει ετικέτες από τις κορυφές και τις ακμές.

Algorithm *BFS(G)*

Input graph G

Output labeling of the edges and partition of the vertices of G

```
for all  $u \in G.vertices()$ 
   $setLabel(u, UNEXPLORED)$ 
for all  $e \in G.edges()$ 
   $setLabel(e, UNEXPLORED)$ 
for all  $v \in G.vertices()$ 
  if  $getLabel(v) = UNEXPLORED$ 
     $BFS(G, v)$ 
```

Algorithm *BFS(G, s)*

```
 $L_0 \leftarrow$  new empty sequence
 $L_0.insertLast(s)$ 
 $setLabel(s, VISITED)$ 
 $i \leftarrow 0$ 
while  $\neg L_i.isEmpty()$ 
   $L_{i+1} \leftarrow$  new empty sequence
  for all  $v \in L_i.elements()$ 
    for all  $e \in G.incidentEdges(v)$ 
      if  $getLabel(e) = UNEXPLORED$ 
         $w \leftarrow opposite(v, e)$ 
        if  $getLabel(w) = UNEXPLORED$ 
           $setLabel(e, DISCOVERY)$ 
           $setLabel(w, VISITED)$ 
           $L_{i+1}.insertLast(w)$ 
        else
           $setLabel(e, CROSS)$ 
   $i \leftarrow i + 1$ 
```

Παράδειγμα

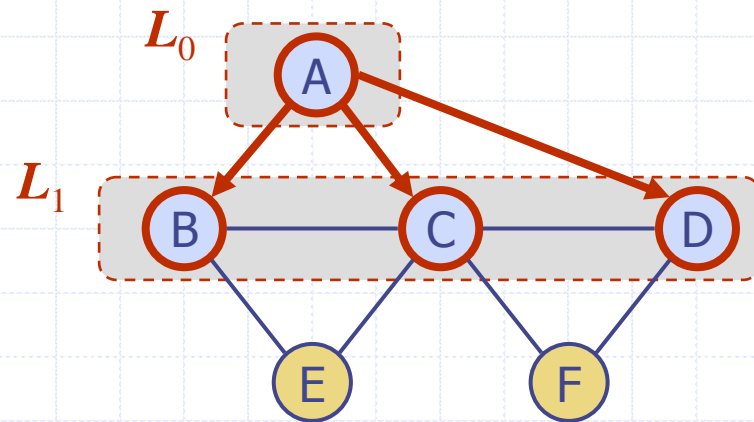
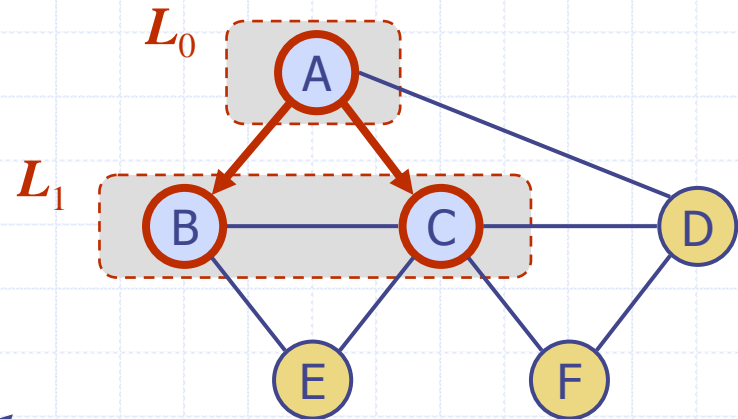
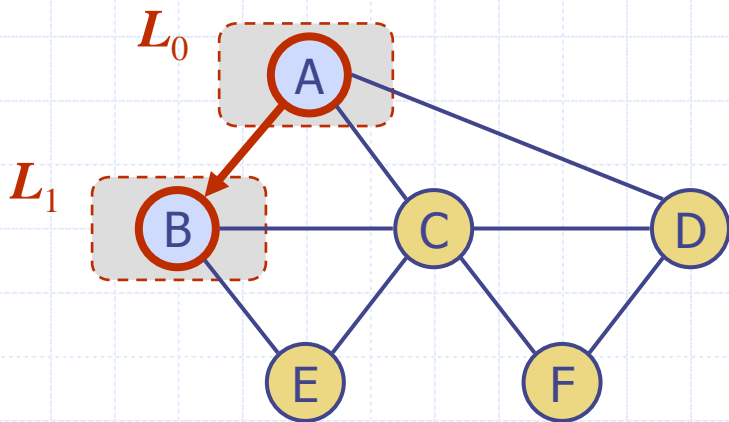
 unexplored vertex

 visited vertex

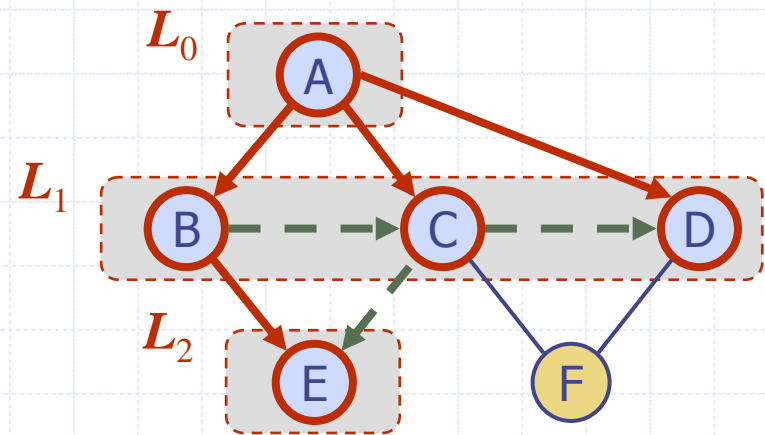
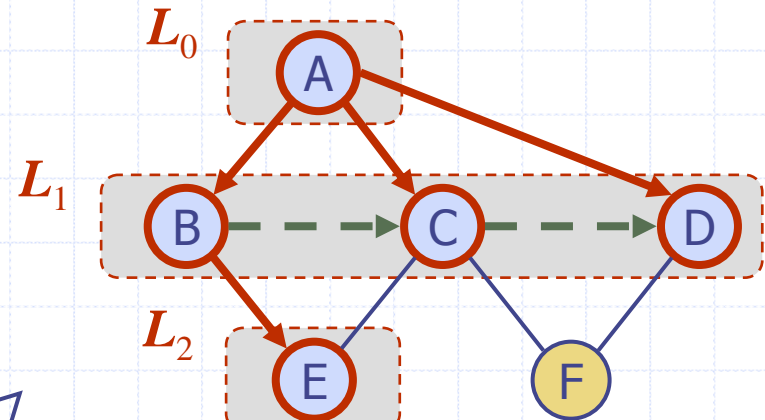
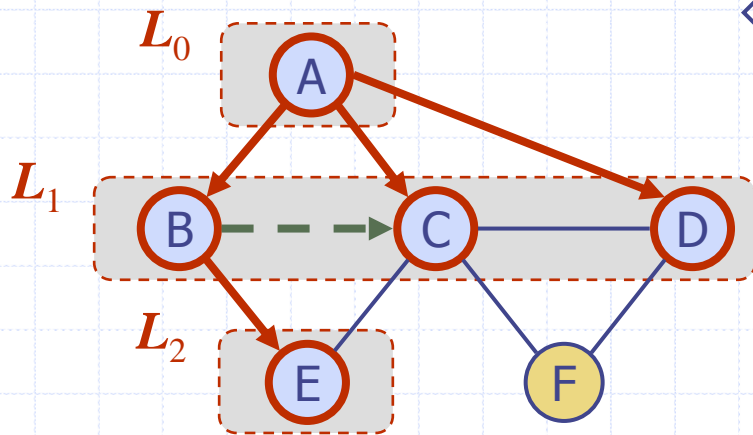
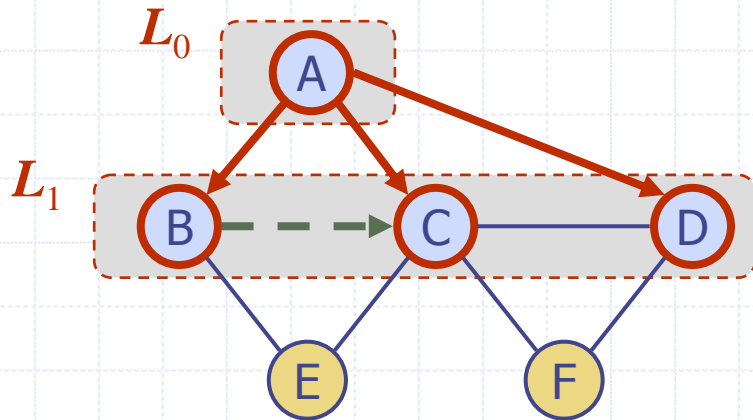
 unexplored edge

 discovery edge

 cross edge

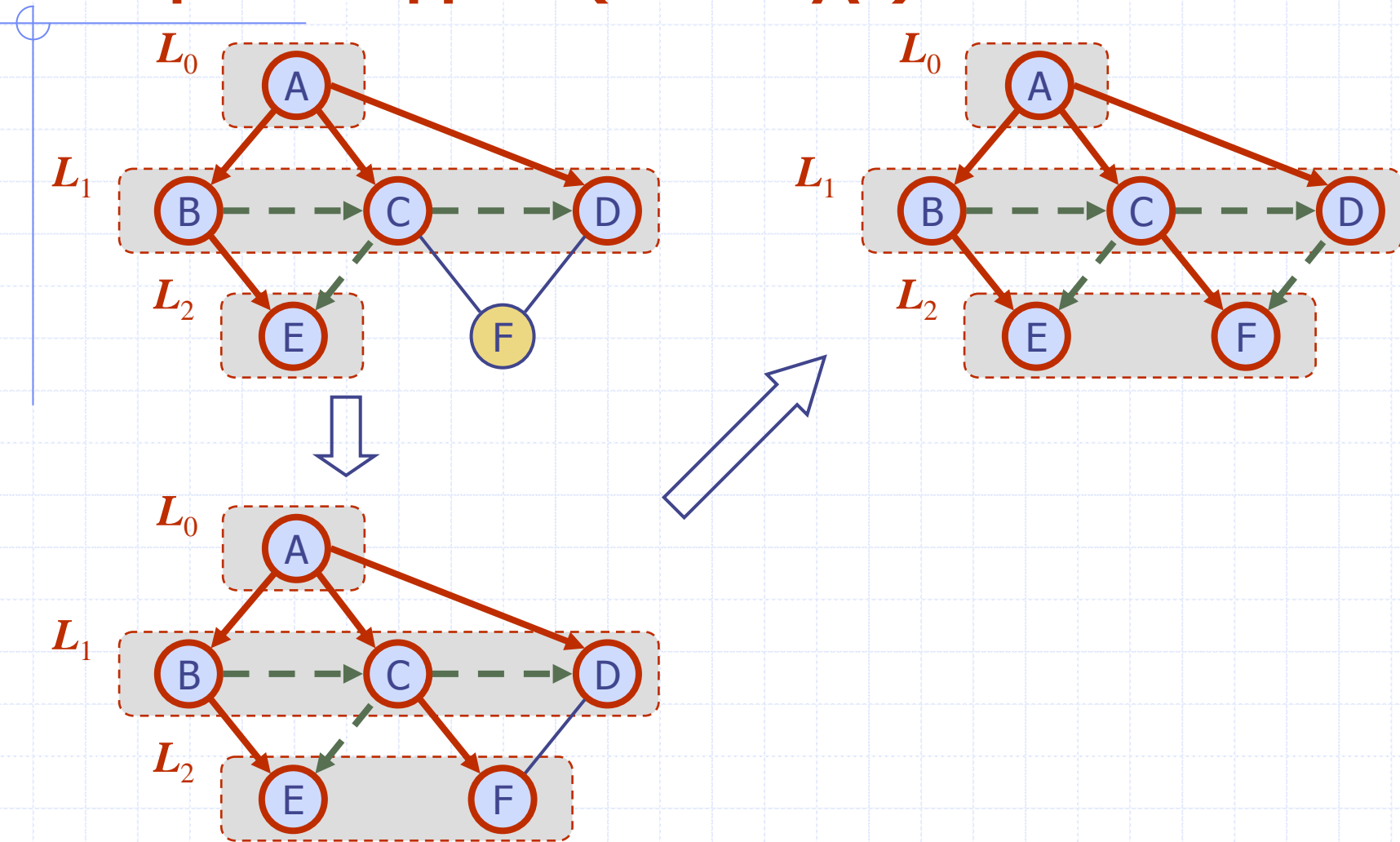


Παράδειγμα (συνεχ.)



Οριζόντια διερεύνηση

Παράδειγμα (συνεχ.)



Οριζόντια διερεύνηση

Ιδιότητες

Σημείωση

G_s : συνδεμένη συνιστώσα του s

Ιδιότητα 1

$BFS(G, s)$ επισκέπτεται όλες τις ακμές και κορυφές του G_s

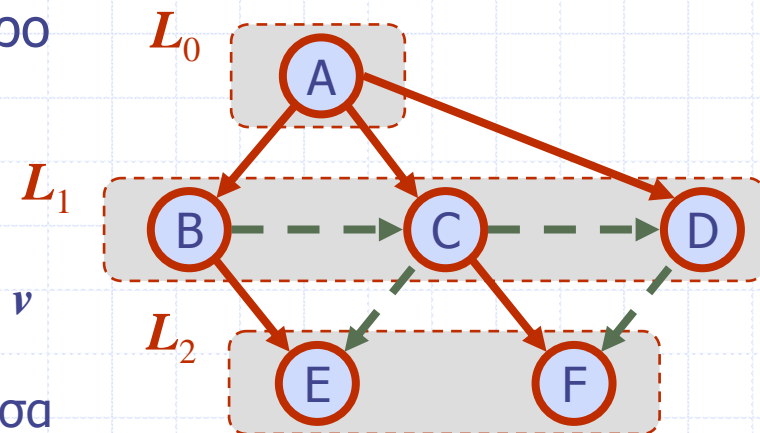
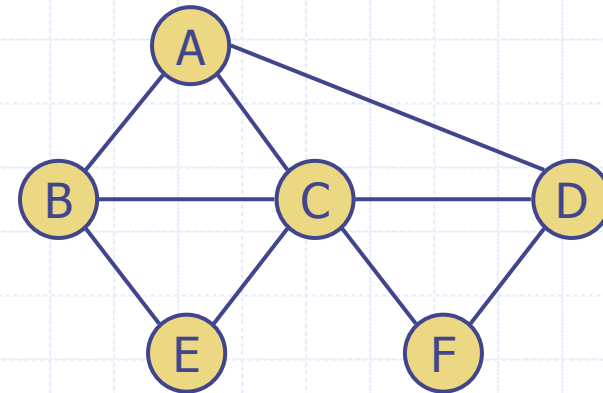
Ιδιότητα 2

Η ανακάλυψη ακμών μαρκαρισμένων από τον $BFS(G, s)$ σχηματίζουν ένα συνδετικό δένδρο T_s του G_s

Ιδιότητα 3

Για κάθε κορυφή v στο L_i

- Το μονοπάτι του T_s από το s στο v έχει i ακμές
- Κάθε μονοπάτι από το s στο v μέσα στο G_s έχει το λιγότερο i ακμές



Ανάλυση

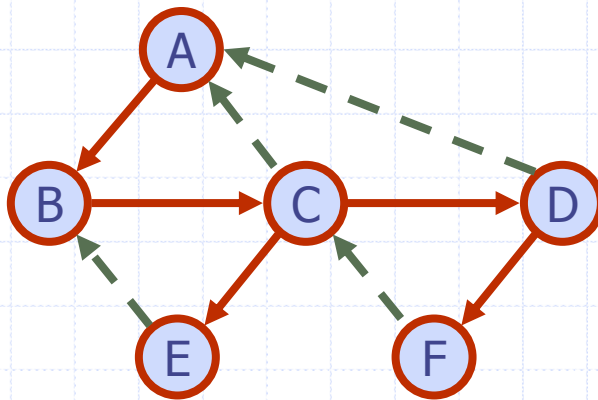
- ◆ Καθορισμός/Διάβασμα μιας ετικέτας κορυφής/ακμής παίρνει χρόνο $O(1)$
- ◆ Κάθε κορυφή καθορίζεται με ετικέτα 2 φορές
 - Μία σαν UNEXPLORED
 - Μία σαν **VISITED**
- ◆ Κάθε ακμή καθορίζεται με ετικέτα 2 φορές
 - Μία σαν UNEXPLORED
 - Μία σαν **DISCOVERY** ή **CROSS**
- ◆ Κάθε κορυφή έχει εισαχθεί 1 φορά στην ακολουθία L_i
- ◆ Η μέθοδος incidentEdges καλείται 1 φορά για κάθε κορυφή
- ◆ Ο BFS τρέχει σε χρόνο $O(n + m)$ υπό την προϋπόθεση ο γράφος να αναπαριστάται από την παρακάτω λίστα δομής
 - Θυμηθείτε ότι $\sum_v \text{deg}(v) = 2m$

Εφαρμογές

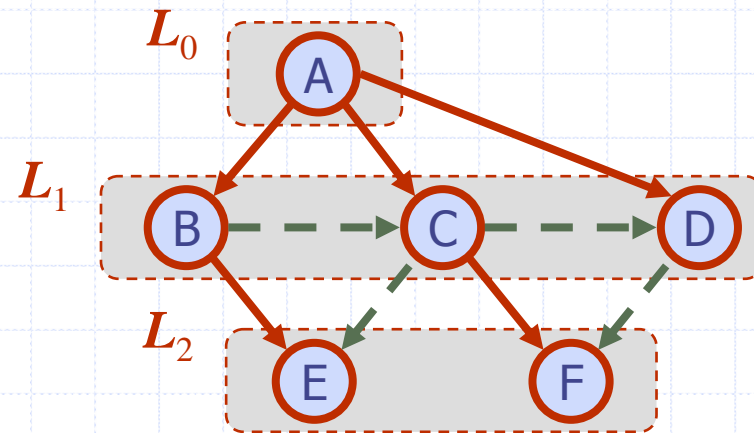
- ◆ Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο, μπορούμε να εξειδικεύσουμε την BFS διάσχιση ενός γράφου G για να λύσουμε τα ακόλουθα προβλήματα σε χρόνο $O(n + m)$
 - Να υπολογίσουμε τις συνδεδεμένες συνιστώσες του G
 - Να υπολογίσουμε ένα δάσος συνδετικών δένδρων του G
 - Να βρούμε ένα απλό κύκλο (cycle) στον G , ή να δούμε ότι ο G είναι ένα δάσος (forest)
 - Με δοσμένες 2 κορυφές του G , να βρούμε ένα μονοπάτι στον G μεταξύ των 2 κορυφών με το μικρότερο αριθμό ακμών, ή να δούμε ότι δεν υπάρχει καθόλου μονοπάτι.

DFS vs. BFS

Εφαρμογές	DFS	BFS
Δάσος συνδετικών δένδρων, συνδεδεμένες συνιστώσες, μονοπάτια, κύκλοι	✓	✓
Μικρότερο μονοπάτι		✓
Διπλά συνδεδεμένες συνιστώσες	✓	



DFS

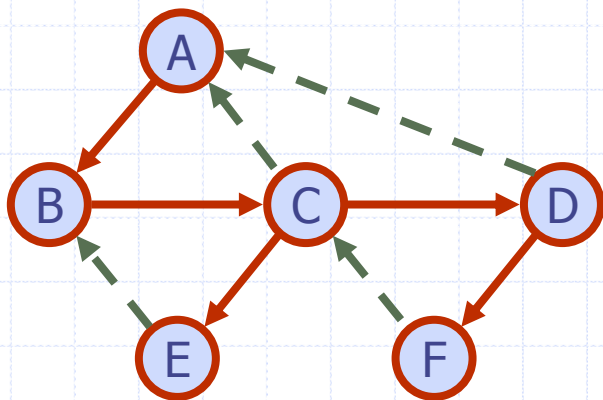


BFS

DFS vs. BFS (συνεχ.)

Ανιούσα ακμή (v, w)

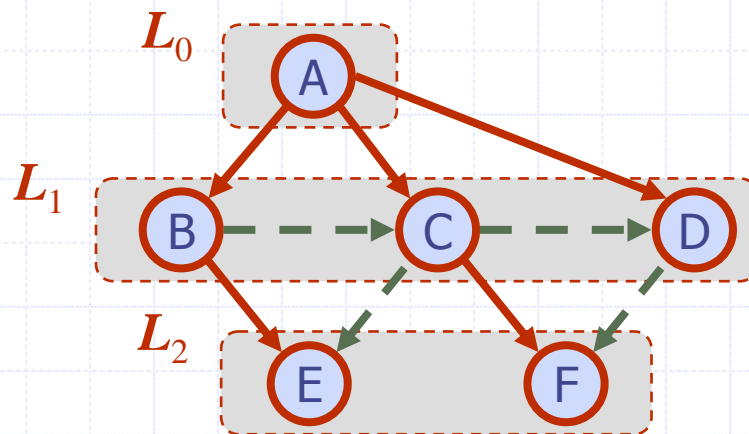
- w είναι ο πρόγονος του v στο δένδρο ανακάλυψης ακμών



DFS

Εγκάρσια ακμή (v, w)

- w είναι το ίδιο επίπεδο με το v ή στο επόμενο επίπεδο στο δένδρο ανακάλυψης ακμών



BFS

Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

- Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:
 - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
 - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
 - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Τόλλης 2015. «Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα. Οριζόντια διερεύνηση». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://opencourses.uoc.gr/courses/course/view.php?id=368>

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.