



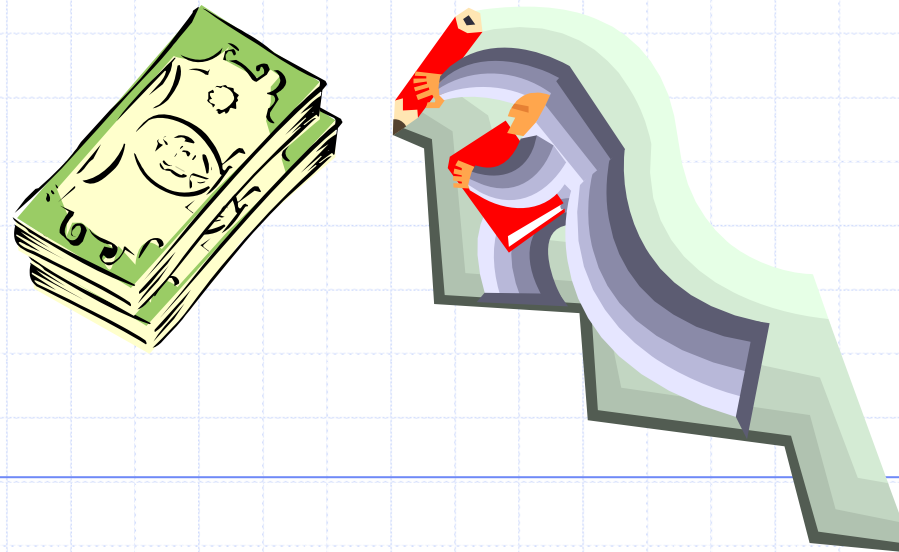
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

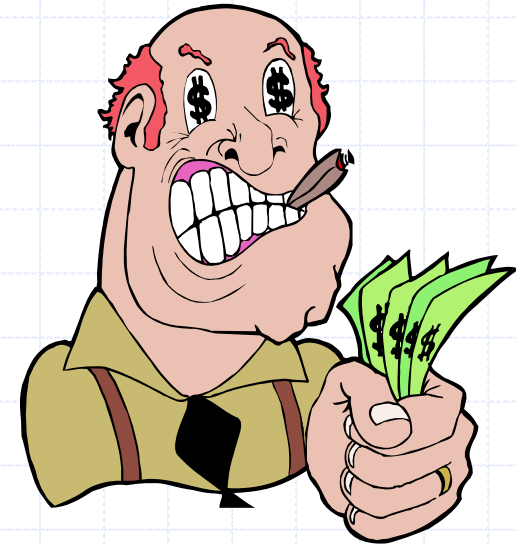
Η Άπληστη Μέθοδος

Ιωάννης Τόλλης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Η Άπληστη Μέθοδος

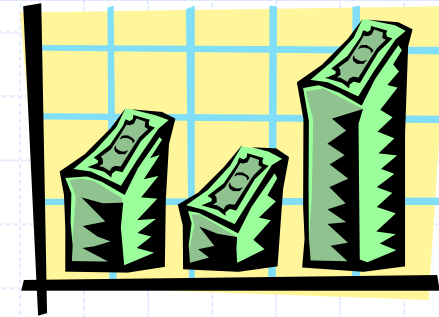


Κύρια Σημεία και Διάβασμα



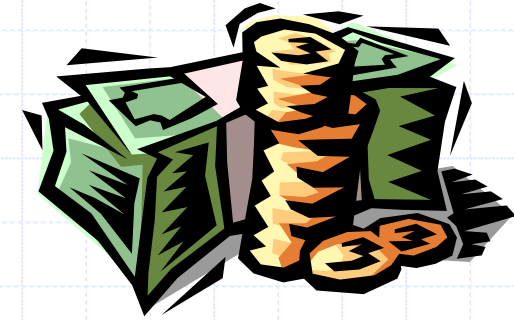
- ◆ Η Άπληστη Τεχνική (§5.1)
- ◆ Το Πρόβλημα του Κλασματικού Σακιδίου (§5.1.1)
- ◆ Προγραμματισμός Εργασιών (§5.1.2)
- ◆ Ελάχιστα Συνδετικά Δένδρα (§7.3)

Η Άπληστη Μέθοδος



- ◆ **Η άπληστη μέθοδος** είναι ένα γενικό παράδειγμα σχεδίασης αλγορίθμων, βασισμένη στα παρακάτω στοιχεία:
 - **διαμόρφωση στοιχείων**: εύρεση διαφορετικών επιλογών, συλλογών ή τιμών
 - **συνάρτηση σκοπού**: απόδοση ενός σκορ στα στοιχεία, το οποίο σκορ θέλουμε είτε να το μεγιστοποιήσουμε είτε να το ελαχιστοποιήσουμε
- ◆ Δουλεύει καλύτερα όταν εφαρμόζεται σε προβλήματα με την ιδιότητα της **άπληστης επιλογής**:
 - μπορεί πάντα να βρεθεί μία συνολικά-βέλτιστη λύση, ξεκινώντας από μια αρχική διαμόρφωση και εφαρμόζοντας μια σειρά τοπικών βελτιστοποιήσεων.

Κάνοντας «ψιλά»



- ◆ **Πρόβλημα:** Να φτάσουμε ένα χρηματικό ποσό και η συλλογή από κέρματα που θα χρησιμοποιήσουμε για το σκοπό αυτό.
- ◆ **Διαμόρφωση:** Το χρηματικό ποσό που αναμένεται να επιστραφεί στον πελάτη, συν τα κέρματα που ήδη επιστράφηκαν.
- ◆ **Συνάρτηση σκοπού:** Ελαχιστοποίηση του επιστρεφόμενου αριθμού κερμάτων.
- ◆ **Άπληστη επίλυση:** Επέστρεφε πάντα το μεγαλύτερο σε αξία κέρμα.
- ◆ **Παράδειγμα 1:** Τα κέρματα εκτιμούνται ως: \$.32, \$.08, \$.01
 - Έχει την ιδιότητα της άπληστης επιλογής, καθώς δε μπορούμε να έχουμε ποσό πάνω από \$.32 χρησιμοποιώντας έναν ελάχιστο αριθμό κερμάτων, χωρίς τη χρήση ενός \$.32 κέρματος (ομοίως για τα ποσά μεγαλύτερα των \$.08, αλλά μικρότερα των \$.32).
- ◆ **Παράδειγμα 2:** Τα κέρματα εκτιμούνται \$.30, \$.20, \$.05, \$.01
 - Δεν έχει την ιδιότητα της άπληστης επιλογής, καθώς τα \$.40 γίνονται βέλτιστα από 2 κέρματα των \$.20, αλλά η άπληστη επίλυση θα επιλέξει 3 νομίσματα (ποια ;)

Το κλασματικό πρόβλημα του σακιδίου



- ◆ Έστω: σύνολο S από n αντικείμενα, όπου το κάθε αντικείμενο i έχει
 - b_i – ένα θετικό όφελος
 - w_i – ένα θετικό βάρος
- ◆ Σκοπός: Επέλεξε αντικείμενα που έχουν μέγιστο συνολικά όφελος, αλλά βάρος το πολύ W .
- ◆ Αν επιτρέπονται τα κλασματικά ποσά, τότε αυτό είναι το **κλασματικό πρόβλημα του σακιδίου**.

- Εδώ, το x_i συμβολίζει την ποσότητα που παίρνουμε από κάθε αντικείμενο i

- Σκοπός: μεγιστοποίηση του $\sum_{i \in S} b_i (x_i / w_i)$






- Περιορισμός: $\sum_{i \in S} x_i \leq W$

Παράδειγμα



- ◆ Έστω: σύνολο S από n αντικείμενα, όπου το κάθε αντικείμενο i έχει:
 - b_i – ένα θετικό όφελος
 - w_i – ένα θετικό βάρος
- ◆ Σκοπός: Επέλεξε αντικείμενα με μέγιστο συνολικά όφελος, αλλά βάρος το πολύ W

Αντικείμενα:

					
1	2	3	4	5	
Βάρος:	4 ml	8 ml	2 ml	6 ml	1 ml
Όφελος:	\$12	\$32	\$40	\$30	\$50
Αξία: (\$ per ml)	3	4	20	5	50



10 ml

“Σακίδιο”

Λύση:

- 1 ml of 5
- 2 ml of 3
- 6 ml of 4
- 1 ml of 2

Κλασματικό Σακίδιο-Αλγόριθμος



- ◆ Άπληστη επιλογή: Να διαλέγεις αντικείμενα με τη μεγαλύτερη **αξία** (όφελος δια βάρος)

- Αφού
$$\sum_{i \in S} b_i(x_i / w_i) = \sum_{i \in S} (b_i / w_i)x_i$$
- Χρόνος εκτέλεσης: $O(n \log n)$.
Γιατί;

- ◆ Ορθότητα: Έστω ότι υπάρχει καλύτερη λύση

- Υπάρχει αντικείμενο i με μεγαλύτερη αξία από ένα επιλεγμένο j (i.e., $v_i < v_j$), αλλά $x_i < w_i$ και $x_j > 0$. Η αντικατάσταση μερικών j με i θα μας δώσει καλύτερη λύση
- Πόσα από το i : $\min\{w_i - x_i, x_j\}$
- Άρα δεν υπάρχει καλύτερη λύση από την άπληστη

Algorithm *fractionalKnapsack*(S, W)

Input: set S of items w/ benefit b_i and weight w_i ; max. weight W

Output: amount x_i of each item i to maximize benefit with weight at most W

for *each item* i *in* S

$x_i \leftarrow 0$

$v_i \leftarrow b_i / w_i$ {value}

$w \leftarrow 0$ {total weight}

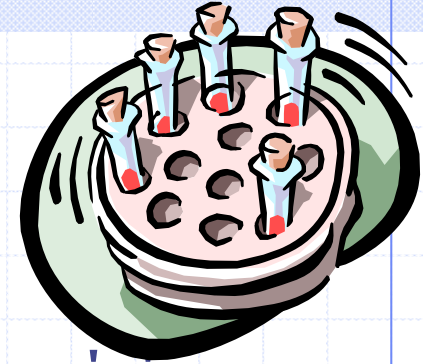
while $w < W$

remove item i with highest v_i

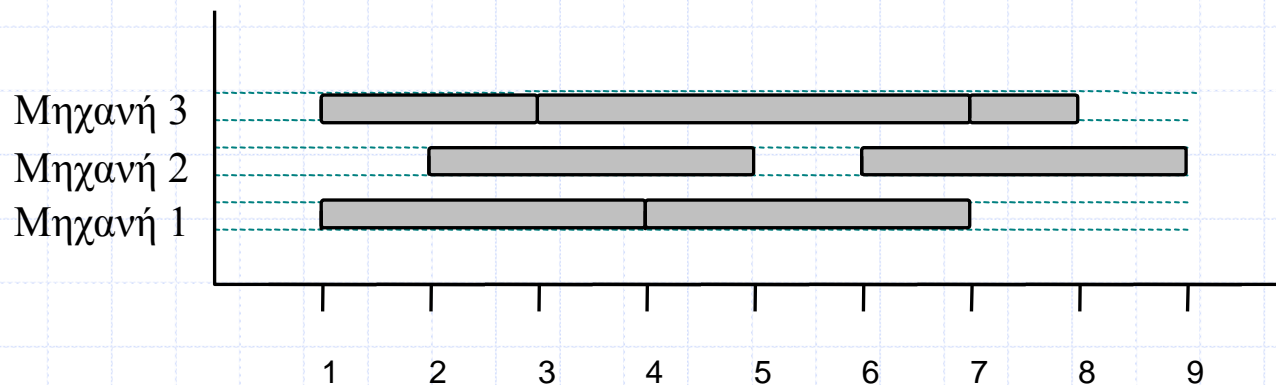
$x_i \leftarrow \min\{w_i, W - w\}$

$w \leftarrow w + \min\{w_i, W - w\}$

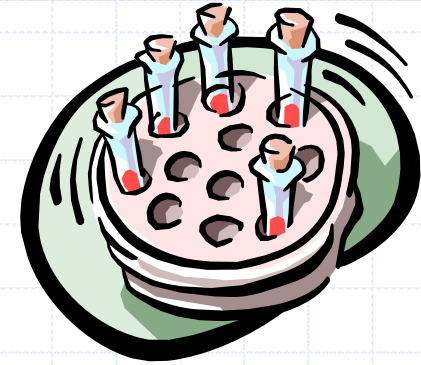
Προγραμματισμός Εργασιών



- ◆ Έστω: σύνολο T από n εργασίες, όπου καθεμιά έχει:
 - Ένα χρόνο εκκίνησης, s_i
 - Ένα χρόνο ολοκλήρωσης, f_i (όπου $s_i < f_i$)
- ◆ Σκοπός: Εκτέλεσε όλες τις εργασίες χρησιμοποιώντας έναν ελάχιστο αριθμό «μηχανών».



Προγραμματισμός Εργασιών - Αλγόριθμος



- ◆ Απληστη Επιλογή: θεώρηση των εργασιών σύμφωνα με το χρόνο εκκίνησης και χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων μηχανών, με αυτή τη σειρά.
 - Χρόνος Εκτέλεσης: $O(n \log n)$.
- ◆ Ορθότητα: Έστω ότι υπάρχει καλύτερος προγραμματισμός.
 - Χρησιμοποιούμε $k-1$ μηχανές
 - Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί k
 - Έστω i η πρώτη προγραμματισμένη εργασία για τη μηχανή k
 - Η μηχανή i πρέπει να συγκρουστεί με $k-1$ άλλες εργασίες
 - Αλλά αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχει μη-συγκρουόμενο schedule με χρήση $k-1$ μηχανών.

Algorithm *taskSchedule(T)*

Input: set T of tasks w/ start time s_i and finish time f_i

Output: non-conflicting schedule with minimum number of machines

$m \leftarrow 0$ {no. of machines}

while T is not empty

remove task i w/ smallest s_i

if *there's a machine j for i* **then**

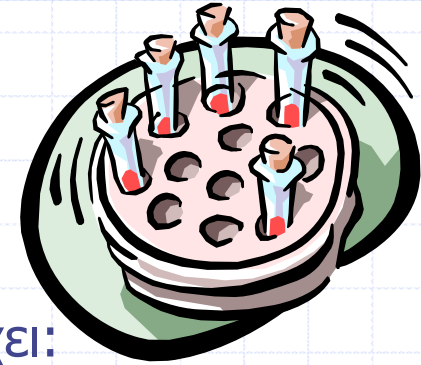
schedule i on machine j

else

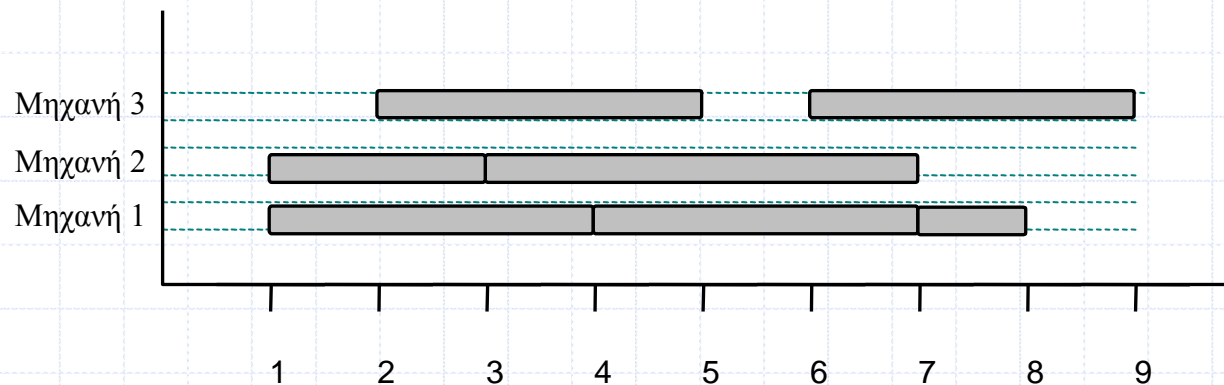
$m \leftarrow m + 1$

schedule i on machine m

Παράδειγμα



- ◆ Έστω: σύνολο T από n εργασίες, όπου καθεμιά έχει:
 - Ένα χρόνο εκκίνησης, s_i
 - Ένα χρόνο ολοκλήρωσης, f_i (όπου $s_i < f_i$)
 - $[1,4], [1,3], [2,5], [3,7], [4,7], [6,9], [7,8]$
(ταξινομημένες σύμφωνα με το χρόνο εκκίνησης)
- ◆ Σκοπός: Εκτέλεση όλων των διεργασιών με τον ελάχιστο αριθμό μηχανών



Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

- Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:
 - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
 - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
 - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο
- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Τόλλης 2015. «Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα. Η Άπληστη Μέθοδος». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://opencourses.uoc.gr/courses/course/view.php?id=368>

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.