ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $7^{\eta\varsigma}$ ἑβδομάδας

43. Ἔστω δακτύλιος R, $a \in R$ καὶ $m \in \mathbb{Z}$.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $(m+1)a = ma + a$ καὶ $(m-1)a = ma - a$.
(β′) Βασισμένοι στὸ (α′) ἀποδεῖξτε ἐπαγωγικὰ ἐπὶ τοῦ $n \in \mathbb{N}$ ὅτι $(m+n)a = ma + na$ καὶ $(m-n)a = ma - na$. Συμπεράνατε ὅτι $(m+n)a = ma + na$ γιὰ κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

44. Θεωρῆστε τὰ ἑξῆς πολυώνυμα τοῦ $\mathbb{Z}[X]$: $f(X) = \sum_{i=0}^{13} i^2 X^i$, $g(X) = \sum_{i=10}^{20} i^3 X^i$. Στὸ $f(X) \cdot g(X)$, ποιὸς εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ X^{28} ;

45. Ἔστω R δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο, $f(X), g(X) \in R[X]$ μὲ $f(X) \neq 0_R$ καὶ $a, b \in R^*$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $f(X) \,|\, g(X) \Leftrightarrow (a \cdot f(X)) \,|\, (b \cdot g(X))$. Ἑπομένως:

> Ὁ πολλαπαλσιασμὸς τῶν πολυωνύμων μὲ μονάδες τοῦ δακτυλίου δὲν ἐπηρεάζει τὴ σχέση τοῦ διαιρεῖν.

46. Ἔστω R μεταθετικὸς δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο, μὴ μηδενικὸ $f(X) \in R[X]$ καὶ $a \in R^*$. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $f(X)$ εἶναι ἀνάγωγο ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ $a \cdot f(X)$ εἶναι ἀνάγωγο. Ἑπομένως:

> Τὸ νὰ εἶναι ἢ νὰ μὴν εἶναι ἀνάγωγο ἕνα πολυώνυμο δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ πολυωνύμου μὲ μονάδα τοῦ δακτυλίου.

47. Ἔστω ὁ δακτύλιος $M_2(\mathbb{Z})$ τῶν 2×2 πινάκων μὲ ἀκέραια στοιχεῖα καὶ

$$f(X) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X^2 + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

καί $\overline{f}$ ἡ πολυωνυμικὴ συνάρτηση, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ $f(X)$, ὅπως τὴν ὁρίσαμε στὸ μάθημα, Ὑπολογῖστε ὅποιο ἀπὸ τὰ παρακάτω ἔχει νόημα:

$$\overline{f}(3), \quad \overline{f}(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}), \quad \overline{f}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

48. Ἔστω R δακτύλιος μὲ μοναδιαῖο.

> Ἕνα μὴ μηδενικὸ πολυώνυμο τοῦ $R[X]$ χαρακτηρίζεται *μονικὸ* ἂν ὁ συντελεστὴς τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου του ἰσοῦται μὲ 1_R.

Ἔστω μὴ μηδενικὸ $f(X) \in R[X]$, τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου εἶναι μονάδα τοῦ R. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $a \in R^*$, τέτοιο ὥστε τὸ πολυώνυμο $a \cdot f(X)$ νὰ εἶναι μονικό.

49. Ἔστω ἀκέραια περιοχὴ R. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε μὴ σταθερὸ πολυώνυμο $f(X) \in R[X]$ ἀναλύεται σὲ γινόμενο ἀναγώγων πολυωνύμων τοῦ $R[X]$.

Ὑπόδειξη. Ἐπαγωγικὴ ἀπόδειξη μὲ ἐπαγωγὴ ἐπὶ τοῦ βαθμοῦ τῶν πολυωνύμων. Ἀπὸ τὴ θεωρία εἶναι γνωστὸ ὅτι κάθε πολυώνυμο πρώτου βαθμοῦ τοῦ $R[X]$ εἶναι ἀνάγωγο. Ἔστω ὅτι, γιὰ κάποιο $k \geq 1$, ἰσχύει ὅτι, ὅλα τὰ πολυώνυμα τοῦ $R[X]$ βαθμοῦ k ἀναλύονται σὲ γινόμενο ἀναγώγων πολυωνύμων τοῦ $R[X]$ (ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση). Θεωρῆστε ἕνα πολυώνυμο $f(X) \in R[X]$ βαθμοῦ $k + 1$ καὶ ἀποδεῖξτε, βασισμένοι στὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση, ὅτι καὶ τὸ $f(X)$ ἀναλύεται, διακρίνοντας τὶς περιπτώσεις: (α΄) $f(X)$ ἀνάγωγο, (β΄) $f(X)$ ὄχι ἀνάγωγο.

50. Ἔστω σῶμα F. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε μὴ σταθερὸ πολυώνυμο $f(X) \in F[X]$ ἀναλύεται σὲ γινόμενο *μονικῶν* ἀναγώγων πολυωνύμων τοῦ $F[X]$.

Ὑπόδειξη: Κάνετε χρήση τῶν ἀσκήσεων 49 καὶ 48.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.