ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $8^{ης}$ ἑβδομάδας

51. Ἔστω σῶμα F καὶ ἀνάγωγα πολυώνυμα $p(X), q(X) \in F[X]$. Ἂν $q(X) \mid p(X)$, τότε $q(X) = c \cdot p(X)$ γιὰ κατάλληλο $c \in F$. Ἄν, ἐπιπλέον, τὰ $p(X), q(X)$ εἶναι μονικά, τότε ἡ σχέση $q(X) \mid p(X)$ συνεπάγεται ὅτι $q(X) = p(X)$.

52. Ἔστω σῶμα F καὶ μονικὸ $f(X) \in F[X]$. Δεῖξτε ὅτι, ἂν $f(X) = g(X)h(X)$ γιὰ κάποια $g(X), h(X) \in F[X]$, τότε ὑπάρχουν μονικὰ πολυώνυμα $g'(X), h'(X)$ μὲ $\deg g'(X) = \deg g(X)$, $\deg h'(X) = \deg h(X)$ καὶ $f(X) = g'(X)h'(X)$.

53. Ἔστω σῶμα F. Χρησιμοποιώντας τὴν πρόταση, ποὺ ἀποδείξαμε στὸ μάθημα, «Κάθε μὴ σταθερὸ πολυώνυμο τοῦ $F[X]$ ἀναλύεται σὲ γινόμενο ἀναγώγων πολυωνύμων τοῦ $F[X]$.», ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε μὴ σταθερὸ *μονικὸ* πολυώνυμο τοῦ $F[X]$ ἀναλύεται σὲ γινόμενο ἀναγώγων *μονικῶν* πολυωνύμων τοῦ $F[X]$.

54. Ἔστω σῶμα F καὶ $f(X) \in F[X]$ βαθμοῦ 2 ἢ 3, τὸ ὁποῖο δὲν ἔχει ρίζα στὸ F. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $f(X)$ εἶναι ἀνάγωγο. Ἂν ὁ βαθμὸς τοῦ $f(X)$ εἶναι > 3, τότε, τὸ νὰ μὴν ἔχει τὸ $f(X)$ ρίζα στὸ F δὲν σημαίνει, κατ' ἀνάγκη, ὅτι τὸ $f(X)$ εἶναι ἀνάγωγο. Δῶστε παράδειγμα πολυωνύμου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς εἶναι ≥ 4, δὲν ἔχει ρίζα καί, ὅμως, δὲν εἶναι ἀνάγωγο.

55. Ἀναλῦστε τὸ πολυώνυμο $f(X) = X^4 - 4 \in F[X]$ σὲ ἀνάγωγα πολυώνυμα τοῦ $F[X]$ σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις: (α′) $F = \mathbb{Q}$, (β′) $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, (γ′) $F = \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + bi\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, (δ′) $F = \mathbb{R}$, (ε′) $F = \mathbb{C}$.

56. (α′) Ἔστω σῶμα F καὶ $f(X), g(X) \in F[X]$ βαθμοῦ $\leq n$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν ὑπάρχουν n διαφορετικὰ στοιχεῖα $a_1, \ldots, a_n$ τοῦ F, τέτοια ὥστε $f(a_i) = g(a_i)$ γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, n$, τότε $f(X) = g(X)$.
    (β′) Ἔστω ὅτι τὸ σῶμα F ἔχει ἄπειρα στοιχεῖα καὶ γιὰ τὰ $f(X), g(X) \in F[X]$ ἰσχύει ὅτι $f(a) = g(a)$ γιὰ κάθε $a \in F$, τότε $f(X) = g(X)$.

57. Στὸ $\mathbb{Z}_5[X]$ ἀναλῦστε σὲ γινόμενο ἀναγώγων πολυωνύμων τὰ πολυώνυμα:
    $$f_1(X) = [2]X^4+[3]X^2+[1], \quad f_2(X) = [2]X^4+[3]X^2+X+[1], \quad f_3(X) = X^4+X^3+[3]X^2+[2]X+[1].$$
    Ἀπαντήσεις: $f_1(X) = [2](X+[2])(X+[3])(X^2+[3])$, $f_2(X) = [2](X+[1])(X^3+[4]X^2+[3])$, $f_3(X)$ εἶναι ἀνάγωγο.

58. Στὸ $\mathbb{Z}_7[X]$ ἀναλῦστε σὲ γινόμενο ἀναγώγων πολυωνύμων τὰ πολυώνυμα:
    $f_1(X) = X^4 + [3]X^3 + X + [6]$, $f_2(X) = X^4 + [2]X^3 + X^2 + [3]X + [2]$,
    $f_3(X) = X^4 + [2]X^3 + [3]X^2 + [4]X + [5]$.
    Ἀπαντήσεις: $f_1(X) = (X^2 + X + [3])(X^2 + [2]X + [2])$, $f_2(X) = (X + [2])(X^3 + X + 1)$, $f_3(X)$ εἶναι ἀνάγωγο.

59. Στὸ $\mathbb{Z}_3[X]$ ἀναλῦστε σὲ γινόμενο ἀναγώγων πολυωνύμων τὰ πολυώνυμα:
    $f_1(X) = X^5 + X^4 + X^3 + [2]$, $f_2(X) = X^5 + X^4 + X + [1]$, $f_3(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X + [2]$,
    $f_4(X) = X^5 + X^4 + X^2 + X + [1]$.
    Ἀπαντήσεις: $f_1(X) = (X^3 + X^2 + [2])(X^2 + [1])$, $f_2(X) = (X + [1])(X^2 + [2]X + [2])(X^2 + X + [2])$,
    $f_3(X) = (X + [1])(X + [2])(X^3 + X^2 + [2]X + [1])$, $f_4(X)$ εἶναι ἀνάγωγο.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.