ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $12^{\eta\varsigma}$ ἑβδομάδας

89. Σ' αὐτὴ τὴν ἄσκηση κάνετε click στὸν Πινακα πολλαπλασιασμου της S_4.
(α΄) Κάνοντας χρήση τοῦ πίνακα καὶ τοῦ «κριτηρίου ὑποομάδων» ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $H = \{1, (1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,2), (1\,3), (2\,3)\}$ εἶναι ὑποομάδα τῆς S_4 (τὸ 1 συμβολίζει τὴν ταυτοτικὴ μετάθεση).
(β΄) Ὑπολογῖστε τὴν ἀριστερὴ καὶ τὴ δεξιὰ κλάση τοῦ $(1\,2\,3\,4) \in S_4$ ὡς πρὸς τὴν H καὶ διαπιστῶστε ὅτι εἶναι διαφορετικές. Εἶναι ξένες;
(γ΄) Θέσετε $(1\,2\,3) = a$, $(1\,2) = b$ καὶ ἐκφρᾶστε ὅλες τὶς μεταθέσεις τῆς H συναρτήσει τῶν a, b. Διαπιστῶστε ὅτι $a^3 = 1$, $b^2 = 1$ καὶ $ba = a^2b$. Θυμηθῆτε ὅτι ἡ διεδρικὴ ὁμάδα βαθμοῦ 3 εἶναι ἡ $D_3 = \langle a, b \,|\, a^3 = 1 = b^2, ba = a^2b\rangle$ καὶ ἐξ αὐτοῦ συμπεράνατε ὅτι $H \cong D_3$.

90. Σ' αὐτὴ τὴν ἄσκηση κάνετε click στὸν Πινακα πολλαπλασιασμου της S_4.
(α΄) Κάνοντας χρήση τοῦ πίνακα καὶ τοῦ «κριτηρίου ὑποομάδων» ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ
$$K = \{1, (3\,4), (1\,2), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,3\,2\,4), (1\,4\,2\,3), (1\,4)(2\,3)\}$$
εἶναι ὑποομάδα τῆς S_4 (τὸ 1 συμβολίζει τὴν ταυτοτικὴ μετάθεση). Ποιὸς εἶναι ὁ δείκτης $[G : K]$ τῆς K στὴ G;
(β΄) Ὑπολογῖστε ὅλες τὶς ἀριστερὲς καὶ ὅλες τὶς δεξιὲς κλάσεις τῆς S_4 ὡς πρὸς τὴν K. Εἶναι ἡ K κανονικὴ ὑποομάδα τῆς G;
(γ΄) Θέσετε $(1\,3\,2\,4) = a$, $(3\,4) = b$ καὶ ἐκφρᾶστε ὅλες τὶς μεταθέσεις τῆς K συναρτήσει τῶν a, b. Διαπιστῶστε ὅτι $a^4 = 1$, $b^2 = 1$ καὶ $ba = a^3b$. Θυμηθῆτε ὅτι ἡ διεδρικὴ ὁμάδα βαθμοῦ 4 εἶναι ἡ $D_4 = \langle a, b \,|\, a^4 = 1 = b^2, ba = a^3b\rangle$ καὶ ἐξ αὐτοῦ συμπεράνατε ὅτι $K \cong D_4$.

91. Ἔστω ὁμάδα G καὶ H ὑποομάδα τῆς G, τῆς ὁποίας ὁ δείκτης στὴ G εἶναι 2 ($[G : H] = 2$). Ἀποδεῖξτε ὅτι $H \lhd G$.
Ὑπόδειξη. Ὑπάρχουν δύο ἀκριβῶς ἀριστερὲς κλάσεις. Ἡ μία εἶναι ἡ H. Ἐξηγῆστε γιατὶ ἡ δεύτερη ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολο $G \setminus H$. Κάνετε ἀνάλογο συλλογισμὸ καὶ γιὰ τὶς δεξιὲς κλάσεις.

92. Ἔστω ὁμάδα G, τῆς ὁποίας ἡ τάξη εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ μόνη γνήσια ὑποομάδα τῆς G εἶναι ἡ τετριμμένη (αὐτὴ ποὺ περιέχει μόνο τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο).

93. Ἔστω ὅτι H_1, H_2 εἶναι ὑποομάδες τῆς ὁμάδας G, μὲ $|H_1| = m$, $|H_2| = n$ καὶ $(m, n) = 1$. Δεῖξτε ὅτι $H_1 \cap H_2$ εἶναι ἡ τετριμμένη ὑποομάδα τῆς G.

94. Ἔστω ὁμάδα G τάξεως p^m, ὅπου ὁ p εἶναι πρῶτος καὶ $m \geq 1$. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει στοιχεῖο τῆς G μὲ τάξη p.
Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ G εἶναι πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα καὶ $a \in G$, $a \neq 1$. Δεῖξτε ὅτι *τάξη* $(a) = p^k$ γιὰ κάποιο $k \in \{1, \ldots, m\}$. Ἂν $k \geq 2$, ποιὰ εἶναι ἡ τάξη τοῦ $a^{p^{k-1}}$;

95. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία $\mathbb{Z}_4 \ni [k] \mapsto i^k \in \mathbb{C}^*$ εἶναι μία καλὰ ὁρισμένη ἀπεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}_4 \to \langle i \rangle$, ἡ ὁποία εἶναι ἰσομορφισμὸς ὁμάδων. Συμπληρῶστε τοὺς πίνακες πράξεων αὐτῶν τῶν ὁμάδων

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$				
$[1]$				
$[2]$				
$[3]$				

$\cdot$	$\phi([0])$	$\phi([1])$	$\phi([2])$	$\phi([3])$
$\phi([0])$				
$\phi([1])$				
$\phi([2])$				
$\phi([3])$				

(στὸν δεξιὸ πίνακα ἀντικαταστῆτε τὰ $\phi([k])$ μὲ τὶς τιμές τους). Στὴ συνέχεια κάνετε τὸ ἑξῆς: Στὸν ἀριστερὸ πίνακα βάλετε ὅπου $[0], [1], [2], [3]$ τὰ σύμβολα e, a, b, c, ἀντιστοίχως καὶ στὸν δεξιὸ πίνακα βάλετε ὅπου $\phi([0]), \phi([1]), \phi([2]), \phi([3])$, πάλι τὰ σύμβολα e, a, b, c, ἀντιστοίχως. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ πίνακες ποὺ θὰ προκύψουν μετὰ τὶς ἀντικαταστάσεις αὐτὲς εἶναι ἴδιοι. Αὐτὸς εἶναι ἕνας ἄλλος τρόπος νὰ "δοῦμε" τὴν ἰσομορφία $\mathbb{Z}_4 \cong \langle i \rangle$.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.