Αλγεβρα I

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινὸ ἑξάμηνο 2015-2016

Βασικὴ περιγραφὴ τῶν θεμάτων ποὺ συζητήθηκαν τὴν 8^{η} ἑβδομάδα

(Δὲν πρόκειται γιὰ λεπτομερῆ περιγραφή.)

Πολυωνυμα με συντελεστες απο ενα σωμα (συνέχεια)

• **Πρόταση 1.** *Ἔστω σῶμα F καὶ πολυώνυμα $p(X), f(X) \in F[X]$, μὲ τὸ $p(X)$ ἀνάγωγο στὸ $F[X]$. Τότε ἰσχύει ἕνα ἀπὸ τὰ δύο: Ἤ* ΜΚΔ $(p(X), f(X)) = 1_F$*, ἢ $p(X) \mid f(X)$.*

• **Θεώρημα 2.** *Ἔστω σῶμα F καὶ ἀνάγωγο πολυώνυμο $p(X) \in F[X]$, ποὺ διαιρεῖ τὸ γινόμενο $f(X)g(X)$, ὅπου $f(X), g(X) \in F[X]$. Τότε τὸ $p(X)$ διαιρεῖ ἕνα, τουλάχιστον, από τὰ $f(X)$, $g(X)$.*

• **Πρόταση 3.** *Ἔστω σῶμα F.*
(α΄) Κάθε μὴ σταθερὸ πολυώνυμο τοῦ $F[X]$ ἀναλύεται σὲ γινόμενο ἀναγώγων πολυωνύμων τοῦ $F[X]$.
(β΄) Κάθε μὴ σταθερὸ μονικὸ πολυώνυμο $f(X) \in F[X]$ ἀναλύεται σὲ γινόμενο ἀναγώγων μονικῶν πολυωνύμων τοῦ $F[X]$. Ἡ ἀνάλυση αὐτὴ εἶναι μοναδική, ὑπὸ τὴν ἑξῆς ἔννοια: Ἂν $f(X) = \prod_{i=1}^{n} p_i(X)$ καὶ $f(X) = \prod_{i=1}^{m} q_i(X)$, ὅπου ὅλα τὰ $p_i(X), q_i(X)$ εἶναι μονικὰ ἀνάγωγα πολυώνυμα τοῦ $F[X]$, τότε $m = n$ καί, ἐνδεχομένως ὕστερα ἀπὸ κατάλληλη ἐπαναρίθμηση τῶν $q_i(X)$, ἰσχύει $q_i(X) = p_i(X)$ γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, n$.

• **Θεώρημα 4** (Πόρισμα τῆς Προτάσεως 3)**.** *Κάθε μὴ σταθερὸ πολυώνυμο $f(X) \in F[X]$ ἀναλύεται σὲ γινόμενο ἀναγώγων πολυωνύμων τοῦ $F[X]$. Ἡ ἀνάλυση αὐτὴ εἶναι μοναδική, ὑπὸ τὴν ἑξῆς ἔννοια: Ἂν $f(X) = \prod_{i=1}^{n} p_i(X)$ καὶ $f(X) = \prod_{i=1}^{m} q_i(X)$, ὅπου ὅλα τὰ $p_i(X), q_i(X)$ εἶναι ἀνάγωγα πολυώνυμα τοῦ $F[X]$, τότε $m = n$ καί, ἐνδεχομένως ὕστερα ἀπὸ κατάλληλη ἐπαναρίθμηση τῶν $q_i(X)$, ἰσχύει: Γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, n$ ὑπάρχει $c_i \in F^*$ τέτοιο ὥστε $q_i(X) = c_i\, p_i(X)$.*

Σημείωση. Συγκρίνατε προσεκτικὰ τὴν ἐκφώνηση τῆς Προτάσεως 3 (β΄) μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ Θεωρήματος 4.

• **Σύμβαση ὁρολογίας**: Ἔστω $f(X) \in F[X]$. Μέχρι τώρα συμβολίζαμε τὴν πολυωνυμικὴ συνάρτηση $\overline{F \to F}$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ $f(X)$, μὲ $\overline{f}$ καί, γιὰ $a \in F$, γράφαμε $\overline{f}(a)$ γιὰ τὴν τιμὴ τῆς $\overline{f}$ στὸ a. Στὸ ἑξῆς, τὴν τιμὴ αὐτὴ θὰ συμβολίζομε μὲ $f(a)$.

• **Ρίζα πολυωνύμου**: Ἔστω σῶμα F, $f(X) \in F[X]$ καὶ $a \in F$. Λέμε ὅτι τὸ a εἶναι ρίζα τοῦ $f(X)$ ὅταν $f(a) = 0_F$.

• **Πρόταση 5.** *Ἔστω σῶμα F, $f(X) \in F[X]$ καὶ $a \in F$. Τότε:*
(α΄) Τὸ ὑπόλοιπο τῆς εὐκλείδειας διαίρεσης τοῦ $f(X)$ διὰ $X - a$ εἶναι $f(a)$.
(β΄) Τὸ a εἶναι ρίζα τοῦ $f(X)$ ἂν καὶ μόνο ἂν $(X - a) \mid f(X)$.

• **Πρόταση 6.** *Ἔστω σῶμα F καὶ μὴ μηδενικὸ $f(X) \in F[X]$. Τότε, τὸ πλῆθος τῶν διαφορετικῶν ριζῶν τοῦ $f(X)$ εἶναι, τὸ πολύ,* $\deg f(X)$.

• **Πρόταση 7.** *Ἔστω σῶμα F καὶ $f(X) \in F[X]$.*
(α΄) Ἂν τὸ $f(X)$ εἶναι βαθμοῦ ≥ 2 καὶ ἔχει ρίζα στὸ F, τότε τὸ $f(X)$ δὲν εἶναι ἀνάγωγο στὸ $F[X]$.
(β΄) Ἂν τὸ $f(X)$ εἶναι βαθμοῦ 2 ἢ 3 καὶ δὲν ἔχει ρίζα στὸ F, τότε τὸ $f(X)$ εἶναι ἀνάγωγο στὸ $F[X]$.
(γ΄) Ἂν τὸ $f(X)$ εἶναι βαθμοῦ ≥ 4 καὶ δὲν ἔχει ρίζα στὸ F, τότε, μὲ μόνη αὐτὴ τὴν πληροφορία δὲν μποροῦμε ν᾽ ἀποφανθοῦμε ἂν τὸ $f(X)$ εἶναι ἀνάγωγο ἢ ὄχι.

Σημείωση. Ὁ ἰσχυρισμὸς ὅτι ἕνα πολυώνυμο εἶναι ἢ δὲν εἶναιἀνάγωγο, πρέπει πάντοτε νὰ διατυπώνεται σὲ σχέση μὲ τὸ σῶμα πάνω ἀπὸ τὸ ὁποῖο θεωροῦμε τὸ πολυώνυμο. Ἔτσι, τὸ $X^2 - 2$ εἶναι ἀνάγωγο, θεωρούμενο ὡς πολυώνυμο τοῦ $\mathbb{Q}[X]$. Θεωρούμενο, ὅμως, ὡς πολυώνυμο τοῦ $\mathbb{R}[X]$ δὲν εἶναι ἀνάγωγο. Τὸ θέμα αυτὸ συζητήθηκε ἐκτενῶς καὶ μὲ παραδείγματα.

• **Θεώρημα 8** (Θεμελιῶδες Θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας)**.** *Κάθε πολυώνυμο τοῦ $\mathbb{C}[X]$ ἔχει ρίζα στὸ $\mathbb{C}$.*

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ διάσημου αὐτοῦ θεωρήματος εἶναι θέμα πιὸ προχωρημένων μαθημάτων.

• **Πόρισμα 9.** *Κάθε μὴ μηδενικὸ πολυώνυμο τοῦ $\mathbb{C}[X]$ βαθμοῦ n ἀναλύεται σὲ γινόμενο n πρωτοβαθμίων πολυωνύμων τοῦ $\mathbb{C}[X]$. Συνεπῶς, τὰ μόνα ἀνάγωγα πολυώνυμα τοῦ $\mathbb{C}[X]$ εἶναι τὰ πρωτοβάθμια.*

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.