

# ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2015-2016

Βασική περιγραφή τῶν θεμάτων πού συζητήθηκαν τὴν 12<sup>η</sup> ἑβδομάδα  
(Δὲν πρόκειται γιὰ λεπτομερῆ περιγραφή.)

- **Πρόταση - Ὁρισμός 1.** Ἐστω  $H$  ὑποομάδα τῆς ομάδας  $G$ . Τὸ σύνολο τῶν ἀριστερῶν κλάσεων ὡς πρὸς  $H$  εἶναι ἰσοπληθές μὲ τὸ σύνολο τῶν δεξιῶν κλάσεων ὡς πρὸς  $H$ . Ὁ κοινὸς πληθικὸς ἀριθμὸς τους λέγεται “δείκτης τῆς  $H$ ” στὴ  $G$  καὶ συμβολίζεται  $[G : H]$ .
- **Θεώρημα 2 (Lagrange).** Ἄν ἡ  $H$  εἶναι ὑποομάδα τῆς πεπερασμένης ομάδας  $G$ , τότε  $|G| = |H|[G : H]$ . Εἰδικότερα, αὐτὸ συνεπάγεται ὅτι ἡ τάξη κάθε ὑποομάδας τῆς  $G$  διαιρεῖ τὴν τάξη τῆς  $G$ .
- **Ὁμομορφισμοὶ Ὁμάδων.** Εἰδικότερα: Μονομορφισμοί, ἐπιμορφισμοί, ἰσομορφισμοί.
- **Πρόταση 3.** Ἄν  $\phi : G \rightarrow G'$  εἶναι ὁμομορφισμὸς ομάδων, τότε ἰσχύουν τὰ ἑξῆς (θεωροῦμε ὅτι οἱ πράξεις τῶν ομάδων συμβολίζονται μὲ πολλαπλασιασμό):
  - (α')  $\phi(1_G) = 1_{G'}$ .
  - (β')  $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$  γιὰ κάθε  $a \in G$ .
  - (γ') Ἄν  $H \leq G$ , τότε  $\phi(H) \leq G'$ . Εἰδικότερα, γιὰ  $H = G$  ἔχομε ὅτι  $\text{Im}\phi = \phi(G) \leq G'$ .
  - (δ') Ἄν  $H' \leq G'$ , τότε  $\phi^{-1}(H') \leq G$ . Εἰδικότερα, γιὰ  $H' = \{1_{G'}\}$ , ἔχομε ὅτι

$$\ker \phi = \{a \in G : \phi(a) = 1_{G'}\} = \phi^{-1}(1_{G'}) \leq G.$$

Ἡ ὑποομάδα  $\ker \phi$  τῆς  $G$  λέγεται “πυρήνας τῆς  $\phi$ ”.

(ε')  $\ker \phi$  εἶναι κανονικὴ ὑποομάδα τῆς  $G$ .

**Συμβολισμός:** Ἄν  $G, G'$  εἶναι ομάδες καὶ ὑπάρχει ἰσομορφισμὸς  $\phi : G \rightarrow G'$ , τότε γράφομε  $G \cong G'$ .

- **Πρόταση 4.** (α') Ἄν  $\phi : G \rightarrow G'$  καὶ  $\psi : G' \rightarrow G''$  εἶναι ἰσομορφισμοὶ ομάδων, τότε  $\psi \circ \phi : G \rightarrow G''$  εἶναι ἰσομορφισμὸς ομάδων.
- (β') Ἄν  $\phi : G \rightarrow G'$  εἶναι ἰσομορφισμὸς ομάδων, τότε  $\phi^{-1} : G' \rightarrow G$  εἶναι ἰσομορφισμὸς ομάδων.
- (γ')  $\Sigma'$  ἔνα μὴ κενὸ σύνολο ομάδων, ἡ σχέση  $\cong$  εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

- **Πρόταση 5.** Έστω κυκλική (πολλαπλασιαστική) ομάδα  $G = \langle g \rangle$ .
  - (α') Κάθε υποομάδα της  $G$  είναι κυκλική.
  - (β') Αν  $|G| = n$  και  $d$  είναι θετικός διαιρέτης του  $n$ , τότε, ή μία και μοναδική υποομάδα της  $G$  τάξεως  $d$  είναι ή  $\langle g^{n/d} \rangle$ .
  - (γ') Αν ή  $G$  είναι άπειρη, τότε  $G \cong \mathbb{Z}$ .
  - (δ') Αν  $|G| = n$ , τότε  $G \cong \mathbb{Z}_n$ .

## Άναφορές

- [1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ' έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.