



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Στατιστική II

Ενότητα 6: Διαστήματα Εμπιστοσύνης II

Γεώργιος Κ. Τσιώτας
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών



Ευρωπαϊκή Ένωση
European Union



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΠΡΟΪΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
ΕΙΣΗΛΘΗ ΤΟΥΡΚΕΙΑ ΣΤΑΧΕΙΩΣΗ
Παρά τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Περιεχόμενα

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τη διαφορά μέσων

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τη διαφορά των αναλογιών

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για διαφορά μέσων

Έστω τ.μ. X η οποία μπορεί να προέρχεται από δύο (2) διαφορετικούς πληθυσμούς A και B με μέσες τιμές μ_A και μ_B αντίστοιχα και με αντίστοιχες διακυμάνσεις σ_A^2 και σ_B^2 . Τότε μπορούμε να διαμορφώσουμε Δ.Ε. για μια τη διαφορά των μέσων για τους δύο πληθυσμούς, δηλ.

$$\mu_A - \mu_B.$$

Στην πιο απλή της μορφή:

1. Για δείγματα $n_A, n_B \geq 30$

ή

2. Για X_1, \dots, X_{n_A} και X_1, \dots, X_{n_B} Κανονικά κατανοημένα,

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για διαφορά μέσων (συν.)

Βάσει τω ανωτέρω θα ισχύει:

$$\frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0, 1).$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για διαφορά μέσων (Για σ_A^2, σ_B^2 γνωστά)

Έτσι δεδομένου του ποσοστού σφάλματος α , το Δ.Ε. ορίζεται ως:

$$P\left(\bar{X}_A - \bar{X}_B - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \leq \mu \leq \bar{X}_A - \bar{X}_B + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right) = 1 - \alpha.$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για διαφορά μέσων (Για σ_A^2, σ_B^2 άγνωστα)

Αφού προσδιορίσουμε τις δειγματικές διακυμάνσεις S_A^2, S_B^2 , το Δ.Ε. ορίζεται ως:

$$P\left(\bar{X}_A - \bar{X}_B - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} \leq \mu \leq \bar{X}_A - \bar{X}_B + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}\right) = 1 - \alpha.$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για διαφορά μέσων (συν.)

1. Για δείγματα $n_A, n_B < 30$ και
2. σ_A^2, σ_B^2 άγνωστα αλλά ίσα ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$), θα προσδιορίσουμε τη μέση δειγματική διακύμανση:

$$s^2 = \frac{s_A^2(n_A - 1) + s_B^2(n_B - 1)}{n_A + n_B - 2},$$

όπου

$$\frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - (\mu_A - \mu_B)}{s \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A + n_B - 2}.$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για διαφορά μέσων (συν.)

Τότε το Δ.Ε. θα ορίζεται στο :

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \pm t_{1-\alpha/2, N} \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}},$$

όπου $N = n_A + n_B - 2$ και θα ισχύει με πιθανότητα $1 - \alpha$.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για για διαφορά μέσω

Έστω νέα μέθοδος συναρμολόγησης ενός προϊόντος δίνει χρόνο (σε *min.*):

$$\{35 \mid 31 \mid 29 \mid 25 \mid 34 \mid 40 \mid 27 \mid 32 \mid 31\}.$$

Μια άλλη μέθοδος δίνει:

$$\{32 \mid 37 \mid 35 \mid 28 \mid 41 \mid 44 \mid 35\}.$$

Να προσδιορίσετε το 95% διάστημα εμπιστοσύνη για τη διαφορά του χρόνου συναρμολόγησης ανάμεσα στις δύο μεθόδους.

Παράδειγμα: Δ.Ε. για για διαφορά μέσωων (λύση)

Προσδιορίζουμε τους δειγματικούς μέσους και τις δειγματικές διακυμάνσεις,

$$\bar{x}_A = \frac{35 + 31 + 29 + 25 + 34 + 40 + 27 + 32 + 31}{9} = 31,56$$

$$\bar{x}_B = \frac{32 + 37 + 35 + 28 + 41 + 44 + 35}{7} = 36.$$

$$s_A^2 = \frac{1}{9-1} \sum_{i=1}^9 (X_i - 31,56)^2 = 19,71, \quad s_A = 4,44.$$

$$s_B^2 = \frac{1}{7-1} \sum_{i=1}^7 (X_i - 36)^2 = 28,67, \quad s_B = 5,35.$$

Παράδειγμα: Δ.Ε. για για διαφορά μέσω (λύση)

Επίσης, δεδομένης της επιθυμίας για ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνη, υποθέτουμε ποσοστό σφάλματος ίσο με 5%. Από τον πίνακα της *t* – *Student* έχουμε την κριτική τιμή $t_{9+7-2,0,975} = t_{14,0,975} = 2,145$. Έτσι,

$$\mu_A - \mu_B \in (31,56 - 36 \pm t_{14,0,975} \cdot S \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{7}})$$

ή

$$P(-9,683 \leq \mu_A - \mu_B \leq 0,803) = 0,95.$$

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S t DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) **above** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.124	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.395	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	1.832	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.256	0.685	1.319	1.711	1.828	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	1.825	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	1.822	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	1.819	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.689
28	0.256	0.683	1.313	1.701	1.817	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	1.814	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.660
30	0.256	0.683	1.310	1.697	1.812	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
31	0.256	0.682	1.309	1.696	1.810	2.040	2.144	2.453	2.744	3.022	3.375	3.633
32	0.255	0.682	1.309	1.694	1.808	2.037	2.141	2.449	2.738	3.015	3.365	3.622
33	0.255	0.682	1.308	1.692	1.806	2.035	2.138	2.445	2.733	3.008	3.356	3.611
34	0.255	0.682	1.307	1.691	1.805	2.032	2.136	2.441	2.728	3.002	3.348	3.601
35	0.255	0.682	1.306	1.690	1.803	2.030	2.133	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591
36	0.255	0.681	1.306	1.688	1.802	2.028	2.131	2.434	2.719	2.990	3.333	3.582
37	0.255	0.681	1.305	1.687	1.800	2.026	2.129	2.431	2.715	2.985	3.326	3.574
38	0.255	0.681	1.304	1.686	1.799	2.024	2.127	2.429	2.712	2.980	3.319	3.566
39	0.255	0.681	1.304	1.685	1.798	2.023	2.125	2.426	2.708	2.976	3.313	3.558
40	0.255	0.681	1.303	1.684	1.796	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	1.781	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.254	0.678	1.292	1.664	1.773	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.254	0.677	1.290	1.660	1.769	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.766	1.980	2.076	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
140	0.254	0.676	1.288	1.656	1.763	1.977	2.073	2.353	2.611	2.852	3.149	3.361
160	0.254	0.676	1.287	1.654	1.762	1.975	2.071	2.350	2.607	2.847	3.142	3.352
180	0.254	0.676	1.286	1.653	1.761	1.973	2.069	2.347	2.603	2.842	3.136	3.345
200	0.254	0.676	1.286	1.653	1.760	1.972	2.067	2.345	2.601	2.838	3.131	3.340
250	0.254	0.675	1.285	1.651	1.758	1.969	2.065	2.341	2.596	2.832	3.123	3.330
inf	0.253	0.674	1.282	1.645	1.751	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.090	3.290

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για διαφορά των αναλογιών

Έστω τ.μ. X δυαδικού αποτελέσματος $X \in \{0, 1\}$, η οποία δειγματοληπτείται από δύο (2) πληθυσμούς A και B . Έτσι έχουμε τα δείγματα:

$$X_1, \dots, X_{n_A}, X_1, \dots, X_{n_B}.$$

Ενδιαφερόμαστε για την διαφορά των αναλογία. Έτσι στα δείγματα έχουμε:

$$\hat{p}_A - \hat{p}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n_A} X_i}{n_A} - \frac{\sum_{i=1}^{n_B} X_i}{n_B}.$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για διαφορά των αναλογιών (συν.)

Μέσω του Κ.Ο.Θ. και δεδομένου ότι $n_A, n_B \geq 30$:

$$\frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B - (p_A - p_B)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n_A} + \frac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{n_B}}} \sim N(0, 1).$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για διαφορά των αναλογιών (συν.)

Έτσι, δεδομένου ποσοστού σφάλματος α , το Δ.Ε. για τη διαφορά αναλογιών στον πληθυσμο θα είναι της μορφής:

$$P(\hat{p}_A - \hat{p}_B - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_A(1 - \hat{p}_A)}{n_A} + \frac{\hat{p}_B(1 - \hat{p}_B)}{n_B}} \\ \leq p_A - p_B \leq \hat{p}_A - \hat{p}_B + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_A(1 - \hat{p}_A)}{n_A} + \frac{\hat{p}_B(1 - \hat{p}_B)}{n_B}})$$

η οποία θα ισούται με $1 - \alpha$.

Τέλος Ενότητας

