
Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

Φροντιστήριο 5:
Προτασιακός Λογισμός: Κατασκευή Μοντέλων

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Άδειες Χρήσης

1. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται στην άδεια χρήσης **Creative Commons** και ειδικότερα

*Αναφορά – Μη εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 3.0 Ελλάδα
(Attribution – Non Commercial – ShareAlike 3. Greece)*

CC BY-NC-SA 3.0 GR

2. Εξαιρείται από την ως άνω άδεια υλικό που περιλαμβάνεται στις διαφάνειες του μαθήματος, και υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης. Η άδεια χρήσης στην οποία υπόκειται το υλικό αυτό αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

1. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
2. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
3. Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

A) ΘΕΩΡΙΑ

Η Μορφολογική Παραγωγή ανήκει στα **συστήματα παραγωγής**, δηλαδή σε αυτά που παράγουν το συμπέρασμα με χρήση συντακτικών κανόνων λογισμού.

Η κατασκευή μοντέλων ανήκει στα **συστήματα ανασκευής**, δηλαδή στα συστήματα τα οποία, προκειμένου να δείξουν ότι $\{P_1, \dots, P_n\} \models C$ επιχειρούν να δείξουν ότι το σύνολο $\{P_1, \dots, P_n, \neg C\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο.

Κατασκευή Μοντέλων

Αποτελεί ένα εναλλακτικό σύστημα απόδειξεων του προτασιακού λογισμού, το οποίο μας επιτρέπει να ελέγξουμε την εγκυρότητα μιας εξαγωγής συμπεράσματος. Άλλες μέθοδοι που έχουμε δει είναι: α) μέσω πίνακα αληθείας για τις υποθέσεις και το συμπέρασμα, όπου ελέγχουμε αν υπάρχουν ερμηνείες που ικανοποιούν τις υποθέσεις αλλά όχι το συμπέρασμα, και β) η μορφολογική παραγωγή.

- Μία ερμηνεία που ικανοποιεί κάθε μέλος ενός συνόλου προτάσεων S αποτελεί μοντέλο του S .
- Ένα σύνολο S είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχει τουλάχιστον μία ερμηνεία/μοντέλο που να ικανοποιεί όλα τα μέλη του.

Η ιδέα της κατασκευής μοντέλων είναι η εφαρμογή σε ένα σύνολο S , κανόνων αντικατάστασης που παρουσιάζονται παρακάτω, με σκοπό να δημιουργήσουμε πιο απλά σύνολα. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται στα ενδιάμεσα σύνολα που παράγονται και τερματίζεται όταν πλέον δεν μπορεί να εφαρμοστεί κανένας άλλος κανόνας αντικατάστασης. Αν το σύνολο που θα προκύψει είναι κενό, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει μοντέλο που να το ικανοποιεί, άρα το αρχικό σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο και κατ' επέκταση η εξαγωγή συμπεράσματος έγκυρη.

Κανόνες αντικατάστασης

Κανόνας	X	Y
$[\wedge]$	$S \cup \{A \wedge B\}$	$S \cup \{A, B\}$
$[\vee]$	$S \cup \{A \vee B\}$	$S \cup \{A\}, S \cup \{B\}$
$[\rightarrow]$	$S \cup \{A \rightarrow B\}$	$S \cup \{\neg A\}, S \cup \{B\}$
$[\leftrightarrow]$	$S \cup \{A \leftrightarrow B\}$	$S \cup \{A, B\}, S \cup \{\neg A, \neg B\}$
$[\neg \wedge]$	$S \cup \{\neg(A \wedge B)\}$	$S \cup \{\neg A\}, S \cup \{\neg B\}$
$[\neg \vee]$	$S \cup \{\neg(A \vee B)\}$	$S \cup \{\neg A, \neg B\}$
$[\neg \rightarrow]$	$S \cup \{\neg(A \rightarrow B)\}$	$S \cup \{A, \neg B\}$
$[\neg \leftrightarrow]$	$S \cup \{\neg(A \leftrightarrow B)\}$	$S \cup \{A, \neg B\}, S \cup \{\neg A, B\}$
$[\neg \neg]$	$S \cup \{\neg \neg A\}$	$S \cup \{A\}$

[del]	$S \cup \{A, \neg A\}$	(delete)
-------	------------------------	----------

Μία ενδεικτική σειρά προτίμησης εφαρμογής των κανόνων είναι ο εξής:

1. [del]

2. [\wedge],[$\neg\vee$],[$\neg\rightarrow$],[$\neg\neg$]

Απλοποιούν το σύνολο καθώς δημιουργούν ένα σύνολο με προτασιακά σχήματα μικρότερου βάθους.

3. [\vee],[\rightarrow],[\leftrightarrow],[$\neg\wedge$],[$\neg\leftrightarrow$]

Απλοποιούν αλλά προκαλούν διακλάδωση.

Κατασκευή Μοντέλων

1. Δείξτε την εγκυρότητα της εξαγωγής συμπεράσματος: $(P \vee Q) \vee R / R \vee (Q \vee P)$

Απόδειξη:

$C_0 = \{ \{ (P \vee Q) \vee R, \neg(R \vee (Q \vee P)) \} \}$	
$C_1 = \{ \{ (P \vee Q) \vee R, \neg R, \neg(Q \vee P) \} \}$	από $[\neg\vee]$
$C_2 = \{ \{ (P \vee Q) \vee R, \neg R, \neg Q, \neg P \} \}$	από $[\neg\vee]$
$C_3 = \{ \{ P \vee Q, \neg R, \neg Q, \neg P \}, \{ R, \neg R, \neg Q, \neg P \} \}$	από $[\vee]$
$C_4 = \{ \{ P \vee Q, \neg R, \neg Q, \neg P \} \}$	από $[\text{del}]$
$C_5 = \{ \{ P, \neg R, \neg Q, \neg P \}, \{ Q, \neg R, \neg Q, \neg P \} \}$	από $[\vee]$
$C_6 = \{ \{ Q, \neg R, \neg Q, \neg P \} \}$	από $[\text{del}]$
$C_7 = \{ \}$	

Απόδειξη με δέντρο:

	(1) $(P \vee Q) \vee R$	
	(2) $\neg(R \vee (Q \vee P))$	
		2 $[\neg\vee]$
	(3) $\neg R$	
	(4) $\neg(Q \vee P)$	
		4 $[\neg\vee]$
	(5) $\neg Q$	
	(6) $\neg P$	
		1 $[\vee]$
(7) R	(8) $P \vee Q$	8 $[\vee]$
===== 3	(9) P	(10) Q
	===== 6	===== 5

2. Ελέγξτε την εγκυρότητα της εξαγωγής συμπεράσματος: $\{P \rightarrow Q, R \rightarrow S\} / P \vee R \rightarrow Q \wedge S$

Ελέγχουμε την ικανοποιησιμότητα του συνόλου $S = \{P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \neg(P \vee R \rightarrow Q \wedge S)\}$

$C_0 = \{ \{ P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \neg(P \vee R \rightarrow Q \wedge S) \} \}$	
$C_1 = \{ \{ P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R, \neg(Q \wedge S) \} \}$	από $[\neg\rightarrow]$
$C_2 = \{ \{ P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R, \neg Q \}, \{ P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R, \neg S \} \}$	από $[\neg\wedge]$
$C_3 = \{ \{ \neg P, R \rightarrow S, P \vee R, \neg Q \}, \{ Q, R \rightarrow S, P \vee R, \neg Q \}, \{ P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R, \neg S \} \}$	από $[\rightarrow]$
$C_4 = \{ \{ \neg P, R \rightarrow S, P \vee R, \neg Q \}, \{ P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R, \neg S \} \}$	από $[\text{del}]$
$C_5 = \{ \{ \neg P, R \rightarrow S, P, \neg Q \}, \{ \neg P, R \rightarrow S, R, \neg Q \}, \{ P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R, \neg S \} \}$	από $[\vee]$
$C_6 = \{ \{ \neg P, R \rightarrow S, R, \neg Q \}, \{ P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R, \neg S \} \}$	από $[\text{del}]$
$C_7 = \{ \{ \neg P, \neg R, R, \neg Q \}, \{ \neg P, S, R, \neg Q \}, \{ P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R, \neg S \} \}$	από $[\rightarrow]$

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο σύνολο του C περιέχει μόνο μεταβλητές και αρνήσεις μεταβλητών και δεν επιδέχεται καμία περεταίρω αντικατάσταση. Το σύνολο αυτό παρέχει ένα μοντέλο του S, δηλαδή την ερμηνεία $I = \{S, R\}$. Επομένως αφού υπάρχει μοντέλο για το S, το S είναι ικανοποιήσιμο και η εξαγωγή συμπεράσματος δεν είναι έγκυρη.

Παρατήρηση: Αν συνεχίσουμε με αντικαταστάσεις στα άλλα σύνολα που έχουν μείνει στο C7, θα βρούμε όλα τα μοντέλα του S, που υπάρχουν.

3. Ελέγξτε την εγκυρότητα της εξαγωγής συμπεράσματος:

$$\{C \leftrightarrow B, A \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A), B \vee \neg A\} / C \wedge \neg A$$

Ελέγχουμε την ικανοποιησιμότητα του συνόλου

$$S = \{C \leftrightarrow B, A \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A), B \vee \neg A, \neg(C \wedge \neg A)\}$$

$$C_0 = \{\{C \leftrightarrow B, A \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A), B \vee \neg A, \neg(C \wedge \neg A)\}\}$$

$$C_1 = \{\{C \leftrightarrow B, A, \neg(C \rightarrow A), B \vee \neg A, \neg(C \wedge \neg A)\}, \\ \{C \leftrightarrow B, \neg A, \neg(C \rightarrow A), B \vee \neg A, \neg(C \wedge \neg A)\}\}$$

από $[\leftrightarrow]$

$$C_2 = \{\{C \leftrightarrow B, A, C, \neg A, B \vee \neg A, \neg(C \wedge \neg A)\}, \\ \{C \leftrightarrow B, \neg A, C \rightarrow A, B \vee \neg A, \neg(C \wedge \neg A)\}\}$$

από $[\neg \rightarrow]$

από $[\neg \neg]$

$$C_3 = \{\{C \leftrightarrow B, \neg A, \neg C, B \vee \neg A, \neg(C \wedge \neg A)\}, \\ \{C \leftrightarrow B, \neg A, A, B \vee \neg A, \neg(C \wedge \neg A)\}\}$$

από [del]

από $[\rightarrow]$

$$C_4 = \{\{C \leftrightarrow B, \neg A, \neg C, B \vee \neg A, \neg C\}, \\ \{C \leftrightarrow B, \neg A, \neg C, B \vee \neg A, \neg A\}\}$$

από $[\neg \wedge]$

από [del]

$$C_5 = \{\{C \leftrightarrow B, \neg A, \neg C, B \vee \neg A, \neg C\}, \\ \{C \leftrightarrow B, \neg A, \neg C, B \vee \neg A, A\}\}$$

από $[\neg \neg]$

$$C_6 = \{\{C, B, \neg A, \neg C, B \vee \neg A\}, \\ \{\neg C, \neg B, \neg A, \neg C, B \vee \neg A\}\}$$

από $[\leftrightarrow]$

από [del]

$$C_7 = \{\{\neg C, \neg B, \neg A, B\}, \\ \{\neg C, \neg B, \neg A, \neg A\}\}$$

από [del]

από $[\vee]$

$$C_8 = \{\{\neg C, \neg B, \neg A\}\}$$

από [del]

Το σύνολο C_8 δεν είναι κενό και επίσης δεν μπορεί να εφαρμοστεί κανένας κανόνας αφού έχουν μείνει μόνο αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών, έτσι το ισοδύναμο σύνολο C_0 ικανοποιείται από την ερμηνεία $I = \{\}$. Επομένως η εξαγωγή συμπεράσματος δεν είναι έγκυρη.

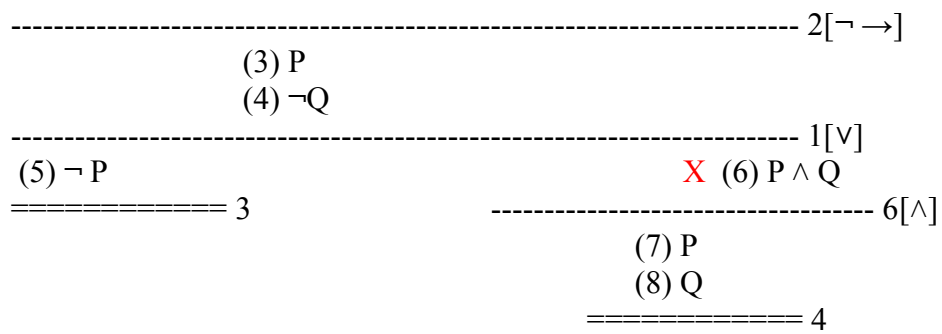
4. Δείξτε την εγκυρότητα της εξαγωγής συμπεράσματος: $\{\neg P \vee (P \wedge Q)\} / P \rightarrow Q$

$$S = \{\neg P \vee (P \wedge Q), \neg(P \rightarrow Q)\}$$

Απόδειξη με δέντρο:

$$\text{X (1) } \neg P \vee (P \wedge Q)$$

$$\text{X (2) } \neg(P \rightarrow Q)$$



Κάθε μονοπάτι έχει κλείσει, επομένως δεν υπάρχει μοντέλο για το S, άρα το S είναι μη-ικανοποιήσιμο και η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.