Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Διάλεξη 1
Εισαγωγή

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

19/2/2014

Τι έχουμε μάθει;

Στο πρώτο μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας ξεκινήσαμε μελετώντας συστήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού, και με εργαλείο την απαλοιφή Gauss, χτίσαμε ένα πολυεπίπεδο οικοδόμημα:

- διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ και πράξεις με διανύσματα
- πίνακες και πράξεις με πίνακες
- παραγοντοποίηση και αντιστροφή πινάκων
- γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία
- τάξη πίνακα
- ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα

Τι έχουμε μάθει;

- γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$
- διάσταση γραμμικού υπόχωρου
- θεμελιώδεις υπόχωροι ενός πίνακα, και βάσεις τους
- γραμμικές απεικονίσεις
- ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων
- διαγωνιοποίηση πινάκων
- ορθογωνιότητα

Που βασίζονται αυτά που έχουμε μάθει;

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία της απαλοιφής Gauss, χρειάζεται να μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα και να τα πολλαπλασιάζουμε ή να τα διαιρούμε με αριθμούς.
Υπάρχουν άλλα μαθηματικά αντικείμενα με τα οποία μπορούμε να κάνουμε αυτές τις πράξεις;

- πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές: εάν $p(x)$ και $q(x)$ είναι πολυώνυμα, και c είναι πραγματικός αριθμός, τότε $p(x) + q(x)$ και $cp(x)$ είναι επίσης πολυώνυμα.
- ακολουθίες πραγματικών αριθμών: εάν a_n και b_n είναι ακολουθίες, $a_n + b_n$ και ca_n είναι επίσης ακολουθία.
- συναρτήσεις από ένα σύνολο X στους πραγματικούς αριθμούς: εάν $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις, τότε $f + g$, που ορίζεται ως $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, και cf, που ορίζεται ως $(cf)(x) = cf(x)$, είναι επίσης συναρτήσεις από το X στο $\mathbb{R}$.

Πώς μπορούμε να γενικεύσουμε αυτά που έχουμε μάθει;

Στόχος μας σε αυτό το μάθημα είναι να μελετήσουμε γενικότερα συστήματα στα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτές τις διαδικασίες. Υπάρχουν άλλα είδη αριθμών με τους οποίους μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε αυτά τα αντικείμενα;

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο ρητούς αριθμούς;
  - το άθροισμα δύο ρητών είναι ρητός,
  - το γινόμενο δύο ρητών είναι ρητός,
  - το πηλίκο ενός ρητού με ένα μη μηδενικό ρητό είναι ρητός.
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο ακεραίους αριθμούς;
  - το άθροισμα δύο ακεραίων είναι ακέραιος,
  - το γινόμενο δύο ακεραίων είναι ακέραιος,
  - το πηλίκο ενός ακεραίου με ένα μη μηδενικό ακέραιο δεν είναι ακέραιος.

Ένα σύνολο αριθμών στο οποίο οι πράξεις έχουν τις συνηθισμένες ιδιότητες ονομάζεται *αλγεβρικό σώμα*.

Τα αξιώματα του σώματος

Ένα αλγεβρικό σώμα είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$ στο οποίο ορίζονται δύο διμελείς πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε *πρόσθεση* και *πολλαπλασιασμό*,

$$(a,\, b) \mapsto a + b \quad \text{και} \quad (a,\, b) \mapsto ab$$

και οι οποίες ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα.

ΑΣ1. Η προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε a, b, $c \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (ab)c = a(bc)$$

ΑΣ2. Η αντιμεταθετική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε a, $b \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$a + b = b + a \quad , \quad ab = ba$$

Τα αξιώματα του σώματος (2)

ΑΣ3. Η επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης ως προς τον πολλαπλασιασμό: για κάθε a, b, $c \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$a(b+c) = ab + ac$$

ΑΣ4. Υπάρχουν στοιχεία $0 \in \mathbb{K}$ και $1 \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε για κάθε $a \in \mathbb{K}$,

$$a + 0 = a \quad \text{και} \quad a1 = a$$

Τα αξιώματα του σώματος (3)

ΑΣ5. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $a + b = 0$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται $-a$ και ονομάζεται *αντίθετο* του a.

ΑΣ6. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $ab = 1$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται a^{-1} και ονομάζεται *αντίστροφο* του a.

Παραδείγματα αλγεβρικών σωμάτων

Παράδειγμα Οι ρητοί αριθμοί, $\mathbb{Q}$, οι πραγματικοί αριθμοί, $\mathbb{R}$, και οι μιγαδικοί αριθμοί, $\mathbb{C}$, με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αποτελούν αλγεβρικά σώματα.

Παράδειγμα Οι ακέραιοι αριθμοί δεν αποτελούν σώμα, αφού ένας ακέραιος διαφορετικός από το 1 ή το -1 δεν έχει αντίστροφο, (ΑΣ6).

Παράδειγμα Το σύνολο $\mathbb{Z}_3$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 3 με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό modulo 3 αποτελεί ένα σώμα. Γενικότερα, για κάθε πρώτο αριθμό p, το σύνολο $\mathbb{Z}_p$ των κλάσεων υπολοίπων modulo p αποτελεί ένα σώμα.

Παράδειγμα Το σύνολο των ρητών αριθμών επεκτεταμένο με την τετραγωνική ρίζα του 2, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, αποτελεί ένα σώμα.

Ιδιότητες αλγεβρικών σωμάτων

Λήμμα

Σε ένα σώμα $\mathbb{K}$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε* $a \in \mathbb{K}$, $0a = a0 = 0$.
2. *Εάν* $a, b \in \mathbb{K}$ *και* $ab = 0$, *τότε είτε* $a = 0$ *είτε* $b = 0$.
3. *Για κάθε* $a, b \in \mathbb{K}$ *ισχύει* $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

Ιδιότητες αλγεβρικών σωμάτων (2)

Απόδειξη.

1. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $0a = a0 = 0$.

   Αφού $0 = 0 + 0$, έχουμε $0a = (0 + 0)a$, και από την επιμεριστική ιδιότητα $0a = 0a + 0a$.
   Προσθέτουμε και στις δύο πλευρές το αντίθετο του $0a$, και έχουμε

$$\begin{array}{rcl} 0a + (-0a) & = & (0a + 0a) + (-0a) \\ 0 & = & 0a + (0a + (-0a)) \\ 0 & = & 0a + 0 \\ 0 & = & 0a\,. \end{array}$$

   Από την αντιμεταθετική ιδιότητα έχουμε επίσης $0 = a0$.

□

Ιδιότητες αλγεβρικών σωμάτων (3)

Απόδειξη.

2. Εάν $a, b \in \mathbb{K}$ και $ab = 0$, τότε είτε $a = 0$ είτε $b = 0$.

Έστω $ab = 0$ και $a \neq 0$.
Τότε, από τα αξιώματα (ΑΣ6) και (ΑΣ1), έχουμε

$$a^{-1}(ab) = (aa^{-1})b = 1b = b\,.$$

Αλλά αφού $ab = 0$, από το (1) έχουμε $a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$. Άρα $b = 0$.

□

Ιδιότητες αλγεβρικών σωμάτων (4)

Απόδειξη.

3. Για κάθε a, $b \in \mathbb{K}$ ισχύει $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

   Από το αξίωμα (ΑΣ3) έχουμε $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0$.
   Άρα $a(-b)$ είναι το αντίθετο του ab, το $-(ab)$.
   Παρόμοια δείχνουμε οτι $(-a)b = -(ab)$.

$\square$