Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 3

Γενικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

21/2/2014

Διατεταγμένες $n-$άδες στοιχείων του σώματος $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα Θεωρούμε το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων στοιχείων του $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n\}\,.$$

Οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα, δηλαδή εάν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$x \dot{+} y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

και

$$a \cdot x = (ax_1, \ldots, ax_n)\,.$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι το $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$.
Η ισχύς των αξιωμάτων του διανυσματικού χώρου αποδεικνύεται εύκολα με χρήση των αντίστοιχων αξιωμάτων ενός σώματος.
Τα στοιχεία του $\mathbb{K}^n$ θα τα λέμε *αριθμητικά διανύσματα*.

Διατεταγμένες n−άδες στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου V πάνω από το $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα Παρόμοια, εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$,

$$V^n = \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in V, i = 1, \dots n\}$$

είναι επίσης διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.
Οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα, χρησιμοποιώντας τις πράξεις του V: εάν $v = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in V^n$ και $a \in \mathbb{K}$, τότε

$$v \dotplus u = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)$$

και

$$a \cdot v = (av_1, \dots, av_n)\,.$$

Ακολουθίες με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{K}^{\infty} = \{(x_1,\, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{K},\, i \in \mathbb{N}\}\,.$$

Οι πράξεις ορίζονται *κατά συνιστώσα*: εάν $(x) = (x_1,\, x_2, \ldots)$ και $(y) = (y_1,\, y_2, \ldots)$, και $a \in \mathbb{K}$, τότε

$$(x) \dot{+} (y) = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2, \ldots)$$

και

$$a(x) = (ax_1,\, ax_2, \ldots).$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η ακολουθία $\bar{0} = (0,\, 0, \ldots)$.

Απεικονίσεις από ένα σύνολο A στο σώμα $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα Το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το A στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}^A$.
Εάν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $a \in \mathbb{K}$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $f \dot{+} g$ και $a \cdot f$ οι οποίες, για κάθε $x \in A$, ικανοποιούν

$$\begin{aligned} (f \dot{+} g)(x) &= f(x) + g(x)\,, \\ (a \cdot f)(x) &= af(x)\,. \end{aligned}$$

Με αυτές τις πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε *πρόσθεση κατά σημείο* και *πολλαπλασιασμό κατά σημείο*, το σύνολο $\mathbb{K}^A$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.
Μηδενικό διάνυσμα είναι η σταθερή απεικόνιση $\bar{0} : A \to \mathbb{K}$, για την οποία $\bar{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

Πολυώνυμα με συντελεστές στο $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα Ένα πολυώνυμο μίας μεταβλητής x με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n, \qquad a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n \text{ και } a_n \neq 0\,.$$

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής x με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}[x]$.
Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το συμβολισμό $\mathbb{K}[x]_n$ για τα πολυώνυμα μίας μεταβλητής x βαθμού ίσου ή μικρότερου από n. Όταν δεν χρειάζεται να διακρίνουμε το σώμα των συντελεστών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\mathbb{P}$ ή $\mathbb{P}_n$.
Η πρόσθεση πολυωνύμων και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό ορίζονται όπως συνήθως.
Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}[x]$ είναι το πολυώνυμο $\bar{0}$, στο οποίο όλοι οι συντελεστές είναι 0.

Τυπικές δυναμοσειρές, με συντελεστές στο $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα Μία δυναμοσειρά μίας μεταβλητής t, με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\,, \qquad a_i \in \mathbb{K}\,, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Το σύνολο όλων των δυναμοσειρών μίας μεταβλητής t με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}(t)$.

Τυπικές δυναμοσειρές, με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, (2)

Η πρόσθεση δυναμοσειρών και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό $c \in \mathbb{K}$, ορίζονται ως εξής

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) \dotplus \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) t^k$$

$$c \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (c a_j) t^j .$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η δυναμοσειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} 0 t^i .$$

Τυπικά αθροίσματα στοιχείων ενός συνόλου X με συντελεστές στο $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα Θεωρούμε ένα σύνολο X και τα τυπικά αθροίσματα στοιχείων του X με συντελεστές στο $\mathbb{K}$,

$$\sum_{x \in X} a_x x\,, \qquad a_x \in \mathbb{K}\,.$$

Η πρόσθεση ορίζεται μέσω της πρόσθεσης των συντελεστών ομοίων όρων :

$$\sum_{x \in X} a_x x \dot{+} \sum_{x \in X} b_x x = \sum_{x \in X} (a_x + b_x) x\,,$$

Τυπικά αθροίσματα στοιχείων ενός συνόλου X με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, (2)

Ο πολλαπλασιασμός με τον αριθμό $c \in \mathbb{K}$ ορίζεται μέσω του πολλαπλασιασμού των συντελεστών:

$$c \cdot \sum_{x \in X} a_x x = \sum_{x \in X} (c a_x) x \,.$$

Το μηδενικό διάνυσμα είναι το τυπικό άθροισμα με όλους τους συντελεστές ίσους με 0,

$$\bar{0} = \sum_{x \in X} 0x \,.$$

Γεωμετρικά διανύσματα

Παράδειγμα Το σύνολο όλων των γεωμετρικών διανυσμάτων του επιπέδου με σημείο εφαρμογής στο σημείο A του επιπέδου, $T_A E^2$ αποτελεί διανυσματικό χώρο, αφού η πρόσθεση δύο γεωμετρικών διανυσμάτων ορίζεται όταν αυτά έχουν το ίδιο σημείο εφαρμογής.

Το σύνολο όλων των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο, με σημείο εφαρμογής σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου, $\bigcup_{X \in E^2} T_X E^2$ δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο το ίδιο, αφού η πρόσθεση δύο γεωμετρικών διανυσμάτων δεν ορίζεται όταν αυτά έχουν διαφορετικό σημείο εφαρμογής.

Εάν σε αυτό το σύνολο ορίσουμε τη σχέση ισοδυναμίας που προκύπτει από την παράλληλη μεταφορά, τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας αποτελούν τα *'ελεύθερα διανύσματα'* πάνω στα οποία ορίζεται η δομή ενός διανυσματικού χώρου.

Διανυσματικά πεδία

Θεωρούμε τώρα απεικονίσεις οι οποίες απεικονίζουν κάθε σημείο X του επιπέδου E^2 σε ένα γεωμετρικό διάνυσμα $\overrightarrow{XA} \in T_X E^2$, δηλαδή απεικονίσεις της μορφής $f : E^2 \longrightarrow \bigcup_{X \in E^2} T_X E^2$ για τις οποίες ισχύει $f(X) \in T_X E^2$.

Αυτές τις συναρτήσεις μπορούμε να τις προσθέσουμε μεταξύ τους (και να τις πολλαπλασιάσουμε με αριθμό) κατά σημείο:

$$(f \dot{+} g)(X) = f(X) + g(X) = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$$

όπου το τελευταίο άθροισμα ορίζεται στο διανυσματικό χώρο $T_X E^2$.

Τέτοιες απεικονίσεις ονομάζονται **διανυσματικά πεδία** στο E^2 και αποτελούν σημαντικά αντικείμενα τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική. Το σύνολο των διανυσματικών πεδίων στο E^2 αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς.

Διανυσματικά πεδία (2)