# Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

## Διάλεξη 4

## Γραμμικοί υπόχωροι


Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης


26/2/2014

# Υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου.

Πότε είναι ένα υποσύνολο $X$ ενός διανυσματικού χώρου $V$ επίσης διανυσματικός χώρος;
Ένας διανυσματικός χώρος πάντα περιέχει το στοιχείο 0 (Αξίωμα ΔΧ3). Συνεπώς το υποσύνολο $X$ πρέπει να μην είναι κενό.
Τα στοιχεία του υποσυνόλου $X$ μπορούμε να τα προσθέσουμε και να τα πολλαπλασιάσουμε με αριθμούς από το σώμα $\mathbb{K}$, θεωρώντας τα ως στοιχεία του $V$.
Εάν το αποτέλεσμα αυτών των πράξεων είναι επίσης στοιχείο του υποσυνόλου $X$, τότε έχουμε καλά ορισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με αριθμό στο υποσύνολο $X$.
Λέμε οτι ένα υποσύνολο είναι **κλειστό ως προς μία πράξη**, εάν κάθε φορά που εκτελούμε την πράξη με στοιχεία του υποσυνόλου, το αποτέλεσμα είναι πάλι στοιχείο του υποσυνόλου.

# Γραμμικός υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου.

**Ορισμός.** Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και ένα μη κενό υποσύνολο $X$ του $V$. Το $X$ λέγεται **γραμμικός υπόχωρος** του $V$ (ή **διανυσματικός υπόχωρος** του $V$) εάν

1. Το $X$ είναι κλειστό ως πρός την πρόσθεση διανυσμάτων,

$$v, w \in X \Rightarrow v + w \in X .$$

2. Το $X$ είναι κλειστό ως πρός τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό,

$$v \in X,\, a \in \mathbb{K} \Rightarrow av \in X .$$

# Παράδειγμα.

**Παράδειγμα** Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$, και το υποσύνολο

$$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

Εάν $(a_1, a_2)$ και $(b_1, b_2)$ είναι στοιχεία του $X$, τότε $a_1 + 2a_2 = 0$, $b_1 + 2b_2 = 0$. Συμπεραίνουμε οτι $(a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) = 0$, και συνεπώς $(a_1, a_2) + (b_1, b_2)$ είναι επίσης στοιχείο του υποσυνόλου $X$.
Άρα το υποσύνολο $X$ είναι *κλειστό ως προς την πρόσθεση*.
Εάν $t \in \mathbb{R}$, $t(a_1, a_2)$ επίσης είναι στοιχείο του $X$. Άρα το υποσύνολο $X$ είναι κλειστό και ως προς τον πολλαπλασιασμό.
$X$ είναι γραμμικός υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $V$.

# Παράδειγμα.

**Παράδειγμα** Θεωρούμε το υποσύνολο

$$Y = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0\}.$$

Είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση;
Για να δείξουμε οτι είναι κλειστό, πρέπει να ελέγξουμε οτι ισχύει **για κάθε** ζεύγος στοιχείων!
Είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό; Τι συμβαίνει εάν $t < 0$;
Για να δείξουμε οτι δεν είναι κλειστό, αρκεί ένα παράδειγμα.

# Λήμμα Γραμμικών Υποχώρων.

## Λήμμα

*Εάν $X$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$, τότε το $X$, με τους περιορισμούς των πράξεων του $V$,*

$$\begin{aligned} \alpha|_{X\times X} &: X \times X \to X \\ \mu|_{\mathbb{K}\times X} &: \mathbb{K} \times X \to X \end{aligned}$$

*είναι διανυσματικός χώρος.*

# Λήμμα Γραμμικών Υποχώρων (Απόδειξη).

Απόδειξη.

Αφού το υποσύνολο $X$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου $V$, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό είναι *καλά ορισμένες* πράξεις στο $X$. Πρέπει να ελέγξουμε οτι επαληθεύονται τα αξιώματα.

Οι ιδιότητες των πράξεων (προσεταιριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα για την πρόσθεση, και οι επιμεριστικές ιδιότητες) ισχύουν για τα στοιχεία του $X$, αφού ισχύουν για όλα τα στοιχεία του $V$.

Απομένει να δείξουμε οτι το μηδενικό διάνυσμα ανήκει στο $X$, και οτι το αντίθετο κάθε διανύσματος του $X$ ανήκει στο $X$.

□

## Παραδείγματα γραμμικών υποχώρων.

**Παράδειγμα** Στο $\mathbb{R}^3$, κάθε ευθεία που περνάει από το 0 είναι γραμμικός υπόχωρος.

Επίσης κάθε επίπεδο που περνάει από το 0 είναι γραμμικός υπόχωρος. Αντιθέτως, ευθείες ή επίπεδα που δεν περνάνε από το 0 δεν είναι γραμμικοί υπόχωροι.

# Παραδείγματα γραμμικών υποχώρων (2).

**Παράδειγμα** Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\infty$ των ακολουθιών πραγματικών αριθμών, θεωρούμε το υποσύνολο των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0. Είναι αυτό ένας γραμμικός υπόχωρος;

Είναι το σύνολο των φραγμένων ακολουθιών γραμμικός υπόχωρος;

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων με συντελεστές στους πραγματικούς αριθμούς, είναι το υποσύνολο των πολυωνύμων που διαιρούνται με το $x^2 + 1$ γραμμικός υπόχωρος;

## Ένωση γραμμικών υποχώρων.

Εάν $V$ είναι ο χώρος $\mathbb{R}^3$, και $X$, $Y$ είναι δύο διαφορετικές ευθείες που περιέχουν το 0, είναι η ένωση $X \cup Y$ γραμμικός υπόχωρος;

Εάν $X$ αποτελείται από το διάνυσμα $(1,\,1,\,2)$ και όλα τα πολλαπλάσιά του, $X = \{a(1,\,1,\,2) \mid a \in \mathbb{R}\}$,
και $Y$ αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια του $(1,\,1,\,0)$,
$Y = \{a(1,\,1,\,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$,
τότε

$$(1,\,1,\,2) + (1,\,1,\,0) = (2,\,2,\,2)\,.$$

Αλλά το διάνυσμα $(2,\,2,\,2)$ δεν ανήκει ούτε στο $X$, ούτε στο $Y$.

Συμπεραίνουμε ότι $X \cup Y$ δεν είναι υποχρεωτικά γραμμικός υπόχωρος.

# Τομή γραμμικών υποχώρων.

### Λήμμα

*Εάν $X$, $Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $V$, τότε $X \cap Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος.*

### Απόδειξη.

Εάν $v, w \in X \cap Y$, τότε $v, w \in X$ και αφού $X$ είναι γραμμικός υπόχωρος, $v + w \in X$, και για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $av \in X$.
Παρόμοια, $v, w \in Y$ και συνεπώς $v + w \in Y$ και $av \in Y$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$.
Συμπεραίνουμε οτι $v + w \in X \cap Y$, και $av \in X \cap Y$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$, δηλαδή οτι $X \cap Y$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό, και συνεπώς είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$. $\square$

# Γραμμικοί υπόχωροι που σχετίζονται με ένα πίνακα.

Όταν μελετήσαμε συστήματα εξισώσεων και πίνακες εξετάσαμε, για κάθε $m \times n$ πίνακα $A$ τα σύνολα

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = 0\}$$

και

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax \in \mathbb{R}^m : \ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Είναι αυτά τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και του $\mathbb{R}^m$ γραμμικοί υπόχωροι;